فاضل سلامة شطناوي
كلية التربية - جامعة اليرموك

أسس الرياضيات
والمفاهيم الهندسية الاساسية



رقـــم التصنيـــف : 516
المؤلف ومن هو في حكمه: د. فاضل سلامة شطناوي
عنـــوان الكتـــاب: اسس الرياضيات والمفاهيم الهندسية الاساسية
رقـــم الايـــداع : 2007/5/1520
الـــواصفـــــات: /الرياضيات//الهندسة/
بيـانـــات النـشر : عمان - دار المسيرة للنشر والتوزيع
* - تم اعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعة الأولى

2008 م - 1428 هـ



عمان-العبدلي-مقابل البنك العربي
هاتف:5627049 فاكس:5627059
عمان-ساحة الجامع الحسيني-سوق البتراء
هاتف:4640950 فاكس:4617640
ص.ب 7218 - عمان 11118 الأردن
www.massira.jo

أسس الرياضيات
والمفاهيم الهندسية الاساسية

فاضل سلامة شطناوي

كلية التربية - جامعة اليرموك



الفهرس

المقدمة

يتقدم العلم من خلال ملاحظة علاقات بين الأشياء أو الحوادث وهذه العلاقات أما أن تقود لتصنيف الأشياء بناء على خواص مشتركة بينها وتميزها عن غيرها أو تقود إلى اكتشاف علاقة بين صنفين أو أكثر من الاصناف المعرفية.

وحتى نعد أطفالنا إعداداً صحيحاً وقوّياً لدورهم في الحياة، علينا أن ننمّي لديهم التفكير بأنماطه المختلفة من خلال تكوين الحس بطبيعة الرياضيات ودورها في التقدّم العلمي والتكنولوجي. ولا يتأتّى ذلك إلاّ من خلال ادراكهم للمفاهيم الرياضيّة وتنمية قدراتهم على اكتشاف علاقات بين هذه المفاهيم، واتقانهم للمهارات الرياضية في سياقات حياتية واقعيّة، واكسابهم انماطاً من التفكير تمكّنهم من فهم المسائل وايجاد الحلول لها.

ومن هنا فقد جاءت فكرة هذا الكتاب عن المفاهيم الهندسيّة وتعميماتها ليستفيد منها المعلم في التخطيط لتدريس الرياضيات تخطيطاً قائماً على المعرفة الدقيقة والادراك التام لهذه المفاهيم وكيفيّة بنائها.

وقد استند المؤلف في تناوله لموضوعات هذا الكتاب إلى خبرة ميدانية طويلة، وكثير من المناقشات والملاحظات الميدانية لمعلمين ومعلمات اخلصوا في عملهم فأبدعوا في مهمتهم.

وانني آمل أن يجد فيه كل مهتم بالرياضيات وتدريسها ما يفيده في مهمته. وأتمنّى على كل من لديه ملاحظة أن لا يمنّ بها على المؤلف كي يتم تطوير هذا الكتاب لتكبر الفائدة ويكثر المستفيدون.

والله من واء القصد

المؤلف



الجزء الأول

مفاهيم أساسيّة
في هندسة اقليدس

الوحدة الأولى: طبيعة الرياضيات والبنية الرياضية لهندسة اقليدس

الوحدة الثانية: الزاوية

الوحدة الثالثة: الدائرة

الوحدة الرابعة: المضلعات

الوحدة الأولى

طبيعة الرياضيات
والبنية الرياضية لهندسة اقليدس

(١-١) طبيعة الرياضيات

(١-٢) البنية الرياضية لهندسة اقليدس

(١-٣) المفاهيم الهندسية وطبيعتها

(١-٤) مفاهيم أوليّة

(١-٥) القطعة المستقيمة والشعاع

(١-٦) مسلمات هندسة اقليدس

(١-٧) المنحنى والمنحنى المغلق البسيط

(١-٨) المنحنى المحّدب والمنحنى المقعر

(١-١) طبيعة الرياضيات

غالباً ما يسوّي كثير من الناس بين الرياضيات وفروعها كالحساب والهندسة. فالحساب يتناول الأعداد والعمليات عليها. والهندسة تتناول الأشكال وخواصّها. بينما تتضمن الرياضيات اكثر من ذلك.

وسنتناول بعض مضمونات الرياضيات كي يهتم بها معلم الرياضيات عند تدريسه لمادّة الرياضيات فيحقق بذلك الأهداف الكبرى من وراء تعليم وتعلّم الرياضيات.

١- الرياضيات لغة العلوم: ينظر بعض التربويين للرياضيات على أنّها لغة. ولهذه اللغة خواص ميّزتها على اللغات الأخرى، وجعلتها افضل من غيرها لتناول العلوم. فلكل كلمة فيها معنيً واحداً محدّداً وواضحاً لا يقبل التأويل. وهي تتصف بالدّقة التامّة في التعبير عن الأفكار والمعاني. كما أنّها تستخدم الرموز مما يوفر لها الاختصار ويجعلها لغة عالميّة تسهم في التواصل بين الحضارات والشعوب.

وتعلّم الرياضيات يتضمن إتقانها كلغة لها رموزها ومصطلحاتها ومفرداتها وعباراتها التي تعبّر عن الأفكار بدقّة ووضوح. فعندما يُطلب من طالب حل مسألة ما ينبغي أن يكون قادراً على فهمها والتعبير عن حلّها بلغة واضحة ودقيقة.

٢- الرياضيات طرق في التفكير: فهي تزودنا باستراتيجيات لتنظيم وتحليل وتركيب البيانات او المعلومات كبيرة العدد وليس بالضرورة أن تكون عدديّة. فالفرد المالك لقدر من المعرفة الرياضياة يستخدمها في مواجهة الكثير من المواقف اليوميّة. ولا ننسى أن العلاقة بين اللغة والتفكير علاقة تبادلية التأثير. فنحن لا نستطيع التفكير بدون لغة واللغة تنمو مع التفكير، حيث ينتج عن التفكير أفكار جديدة تحتاج الى أسماء وكلمات جديدة للتعبير عنها. ولذلك كي ننمّي التفكير عند المتعلم لا بدّ من اكسابه اللغة الصحيحة والدقيقة كي يستطيع فهم ما يقرأ ويفكر تفكيراً صحيحاً عند بحثه عن حل لمسألة ما.

٣- الرياضيات هي دراسة الأنماط والعلاقات. فالأطفال بحاجة لأن يدركوا الأفكار المتكررة والعلاقات بين الأفكار الرياضية. وتشكل هذه العلاقات والأفكار محاور موحدة من خلالها يرتبط منهاج اي موضوع مع المواضيع التي سبقته. ويجب أن يرى الأطفال كيف تشبه فكرة ما أو تختلف عن الأفكار الأخرى التي تمّ تعلّمها. فطفل الصف الثاني

الأساسي مثلاً يمكن أن يرى ويدرك كيف ترتبط حقيقة ما (مثل ٣+٢=٥) مع حقيقة أخرى (مثل ٥-٣=٢).

٤- الرياضيات أداة ووسيلة، إنها الأداة التي يستعملها الرياضيون، وتُستعمل أيضاً من قبل كل فرد في حياته اليوميّة. لذلك، فالطفل يقدّر لماذا يتعلّم الحقائق الرياضية والمهارات والمفاهيم التي يتضمنها المنهاج المدرسي. وهو يستعمل الرياضيات لحل مسائل مجردة أو عملية كما يفعل الرياضيون. وتستعمل الرياضيات في الأعمال والمهن المختلفة.

(١-٢) البنية الرياضيّة لهندسة اقليدس:

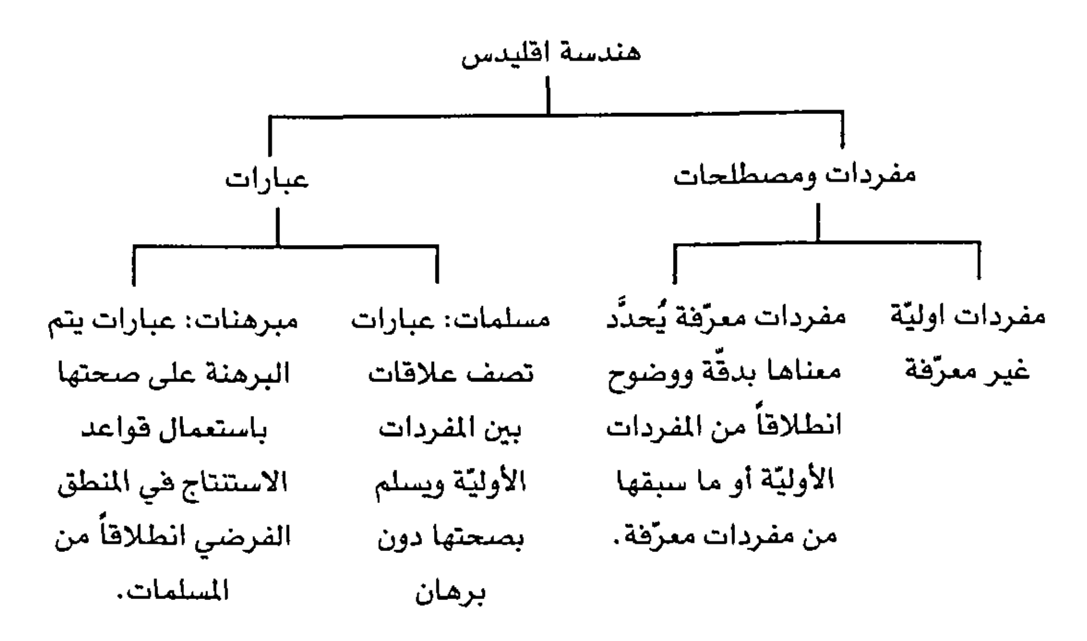
البنية لبرياضية لهندسة اقليدس بنية افتراضيّة تبدأ بمجموعة من التعابير والمصطلحات تقبل دون تعريف (مثل نقطه، مستقيم، مستوى،...) ترتبط بعلاقات تُسمّى مسلمات يسلّم بصحتها دون برهان.

فإذا سألت عن معنى "متوازي أضلاع" قيل لك بأنّه "شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان". وستجد أنه قد استخدمت الكلمات: شكل، شكل رباعي، ضلع، متوازيان لتحديد معنى متوازي الاضلاع. ولكي نفهم معنى متوازي الأضلاع يجب أن نفهم أولاً معنى هذه الكلمات. وعندما تسأل عن معناها سيقدم لك بدلالة كلمات أخرى. واذا استمرّ الحال هكذا فإننا سنصل إلى كلمات لا نستطيع أن نجد كلمات أبسط منها نستعملها لتحديد معناها، وستكون هذه الكلمات من البساطة والوضوح بحيث نقبلها دون تعريف لفظي لها، تسمّى هذه الكلمات كلمات أوليّة او كلمات غير معرّفة يُتفق عليها أولاً ثم تستعمل بعد ذلك لتعريف كلمات أخرى تعريفاً يحّدد معناها بدقّة ووضوح.

وكذلك الجمل في الرياضيات. والجُمل في الرياضيات هي جمل خبريّة إمّا أن تكون صحيحة فقط أو خطأ فقط ولا يجوز أن تكون صحيحة وخطأ في آن واحد. تُسمّى الجمل في الرياضيات عبارات. ولكي نقبل صحة عبارة ما لا بُد من اثبات صحتها اعتماداً على صحّة عبارات أخرى سبقتها، والعبارات الأخرى ستعتمد في صحتها على عبارات سبقتها أيضاً، وهكذا.

وسيقودنا هذا الأمر أيضاً إلى عبارات نقبلها ونسلّم بصحتها دون برهان تسمّى مسلمات نعتمد عليها في إثبات صحّة عبارات أخرى تُسمّى مبرهنات.

والمخطط التالي يوضح بنية هنسة اقليدس.



(١-٣) المفاهيم الهندسيّة وطبيعتها:

المفاهيم الهندسيّة أفكار مجّردة يمكن وصفها او تعريفها ولا يمكن ادراكها بالحواس. فما من أحد رأى الخط المستقيم، ولكننا نرى أشياء نصفها بأنها مستقيمة، فنقول إنّ حافّة الورقة مستقيمة وحافة المكتب مستقيمة... وهكذا. ويمكن أن نرسم أشكالاً على ورقة بيضاء ونقول إنّ هذه نقطة وهذه قطعة مستقيمة وهذه زاوية... الخ.

والمفاهيم الهندسيّة (والرياضيّة بشكل عام) نوعان:

١) مفاهيم أوليّة غير معرّفة ندرك معناها ونصفها ولا نستطيع تعريفها.

٢) مفاهيم معرفة وهي مفاهيم يمكن تعريفها بعبارة تُحدّد معناها بدقة ووضوح. والمفهوم الرياضي بناء عقليّ. وهو تجريد عقلي لخواص مشتركة ومميزة لمجموعة من الأشياء أو الأحداث التي يمكن ملاحظتها. تُسمّى هذه المجموعة مجموعة المرجع للمفهوم، وعناصر هذه المجموعة تُسمّى أمثلة المفهوم. وأمثلة المفهوم يمكن أن تكون أشياء مدركة بالحواس (مفاهيم المجموعات)، أفعال (مفاهيم عملياتيّة)، مقارنات (مفاهيم علاقيّة)، أو تنظيمات (مفاهيم بنائيّة).

كما تُسمّى الخواص المشتركة والمميزة لأمثلة المفهوم بالخواص الجوهريّة للمفهوم أو مسلمات المفهوم. وعندما نعرّف مفهوماً فإنّ التعريف يجب أن يتضمن هذه الخواص مفصّلة أو مختصرة.

وبتحليل هذا التعريف للمفهوم سنجد أنّ للمفهوم خمسة اركان هي:-

١) الخواص الجوهرية (الأساسيّة) : وهي الخواص المشتركة بين الأشياء أو الأحداث التي تكوّن المفهوم، والمميزة لها عن غيرها. وتُعتمد هذه الخواص لتصنيف الأشياء إلى أمثلة انتماء للمفهوم أو عدم انتماء.

٢) مصطلح المفهوم: وهو الاسم أو الرمز الذي يطلق على المفهوم بعد تحديد خواصه الجوهرية.

٣) أمثلة المفهوم: وهي كافّة الأشياء أو الأحداث التي تتوفر في كل منها خواص المفهوم الجوهريّة وكل واحدٍ منها يكون مثالاً على المفهوم.

٤) تعريف المفهوم: وهو تجميع أو تلخيص للخواص الجوهرية في عبارة بهدف تحديد المعنى الدقيق والواضح للمفهوم.

٥) الخواص الثانوية للمفهوم: وهي خواص يمكن استنتاجها والبرهنة على صحتها اعتماداً على الخواص الجوهريّة للمفهوم والمعارف الرياضيّة التي سبقت هذا المفهوم في تسلسل عناصر البنية التي ينتمي إليها المفهوم. وتصنّف الخواص الثانوية للمفهوم إلى ثلاثة أصناف أو انواع:

أ) خواص تتوفر في جميع امثلة المفهوم وتسمّى خواص ثانوية ثابتة.

ب) خواص تتوفر في بعض امثلة المفهوم وتُسمّى خواص ثانوية متغيّرة.

جـ) خواص تتناول علاقة بين مثالين من أمثلة المفهوم وتسمى خواص ثانوية علاقيّة.

وقد لا يكون ممكناً تناول هذه الأركان الخمسة دفعة واحدة في المنهاج المدرسي ولذلك يقدّم منها في مرحلة ما ما هو مناسب لتلك المرحلة العمريّة للمتعلّم وبصورة تتمشّى مع درجة نضجه واستعداده. وفي مرحلة لاحقة يتم التوسع فيما أعطي في المرحلة السابقة وتقديم معلومات أخرى حول المفهوم.... وهكذا، الى أن يكتمل تقديم المفهوم بأركانه الخمسة وباللغة الرياضيّة الدقيقة ، وهو ما يتمشّى مع مفهوم المنهاج الحلزوني.

وفي المرحلة التي يستوجب على المتعلم ادراك الخواص الجوهرية للمفهوم، تُوجّه نشاطات المتعلم نحو ادراك الخاصّة (أو الخواص) الجوهريّة من خلال عدد محدود من أمثلة المفهوم وعندها يكون المتعلم قد جرّد تلك الخاصّة (أوالخواص) يقوم بعدها بتعميم هذه الخاصّة (الخواص) لتشمل جميع أمثلة المفهوم.

وسنتناول في البنود التالية بعض مفاهيم هندسة اقليدس بشيء من التفصيل.

(١-٤) مفاهيم أوليّة:

النقطة والمستقيم والمستوى والفضاء هي المفاهيم الأساسية في الهندسة الأقليدية وهي مفاهيم غير معرّفة تستخدم لتعريف مفاهيم أخرى او وصف مسائل. وكون هذه المفاهيم غير معرّفة (أي لا يمكن وضع صياغة لفظية تحدد المعنى لهذه المفاهيم بدقة ووضوح)، فإننا نلجأ لتوصيل معناها إلى الطلاب من خلال التمثيل بالرسومات أو النماذج.

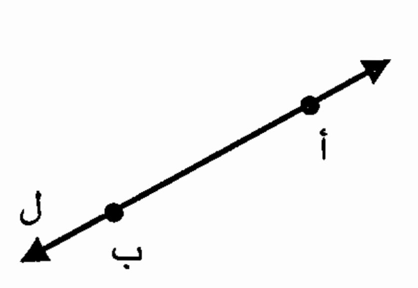
النقطة: موقع مدينة ما على خريطة، أو ثقب في ورقة نصنعه بدبوس رفيع أو رأس دبوس أمثلة توضح فكرة النقطة. وإذا استخدمنا الطبشورة ورسمنا شحطة صغيرة على اللوح وطلبنا من التلاميذ استخدام المسّاحة لتصغير هذا الأثر إلى أقصى حد ممكن فإن هذا الأثر يمثل نقطة.

ومن الممكن أن نعطي (أو نطلب من الطلاب) أمثلة من الواقع على النقطة بمعناها الاقليدي. وتُستخدم حروف الهجاء الكبيرة لتسمية النقط. انظر الشكل التالي

أ . (نقطة أ)　　　　　ب. (نقطة ب)

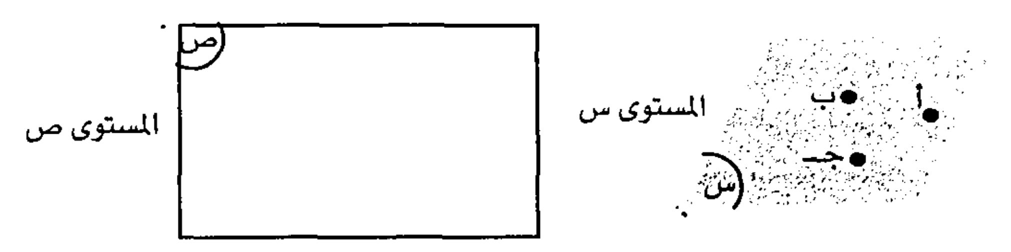
وجميع الأشكال الهندسية تتكون من نقاط. ومن هذه الأشكال الخط المستقيم.

المستقيم: ويمثل برسم كالرسم المجاور. ويشير السهمان إلى الامتداد اللانهائي للخط المستقيم. ويسمّى الخط المستقيم باستعمال حرف صغير من حروف الهجاء مثل ل ، م ، ن،.... أو باستعمال أي نقطتين واقعتين عليه مثل، أ ، ب ونقول:



المستقيم ل أو المستقيم أ ب ليعني المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب ونختصر ذلك بالرموز ونكتب $\overleftrightarrow{ل}$ أو $\overleftrightarrow{أب}$.

المستوى : وهو مفهوم غير معرف أيضاً، ويقدم للطلبة من خلال نماذج كسطح الطاولة أو أرضية الغرفة...، ويشترط في أي سطح كي يكون مستوياً أن ينطبق عليه خط مستقيم في جميع أوضاعه. ومع أن المستوى يمتد بكافة الاتجاهات بلا نهاية فإننا نمثله بشكل رباعي كالأشكال التالية:

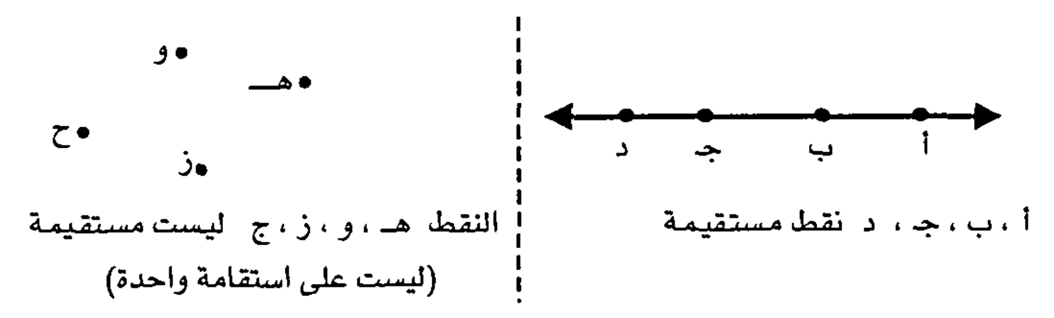


ويسمى المستوى بحرف كبير مُزيّن من حروف الهجاء مثل س أو ص أو ع... أو باستعمال ثلاث نقط (لا تقع على خط مستقيم) في المستوى ونقول المستوى أ ب جـ.

والمفهوم الرابع غير المعرّف هو الفضاء: وهو مجموعة كافة النقط.

وتستخدم المفردات غير المعرفة: نقطة، مستقيم، مستوى، فضاء، لتعريف مفردات أخرى جديدة.

تعريف (١) النقط المستقيمية: تكون النقط أ ، ب ، جـ.... (ثلاث نقط على الأقل) مستقيمة (أو على استقامة واحدة) إذا وقعت جميعها على مستقيم واحد.

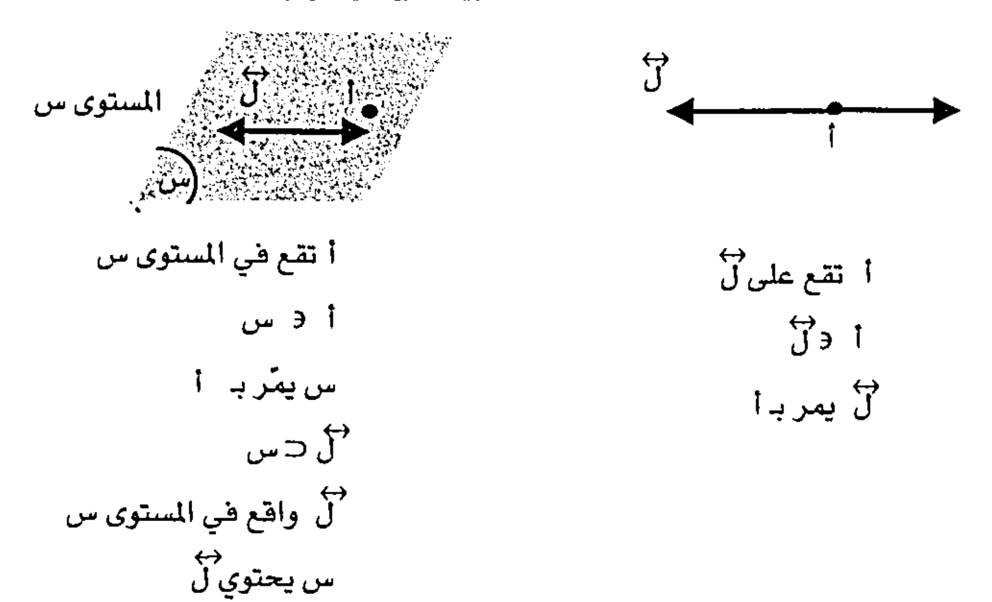


أ ، ب ، جـ ، د نقط مستقيمة

النقط هـ ، و ، ز ، ج ليست مستقيمة (ليست على استقامة واحدة)

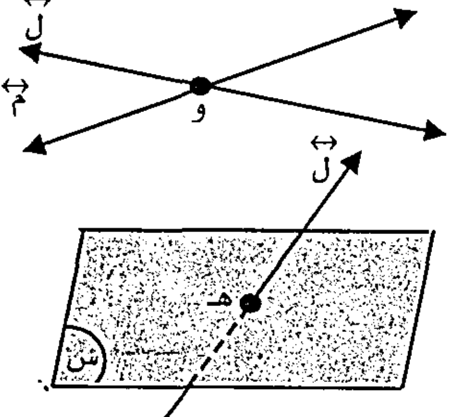
تعريف (٢) النقط المستوية: تكون النقطة أ، ب ، جـ ، د ... (أربع نقاط على الأقل) مستوية إذا وقعت جميعها في مستوى واحد.

وتستخدم بعض التعبيرات لوصف العلاقات بين النقط والمستقيمات والمستويات كما يلي:



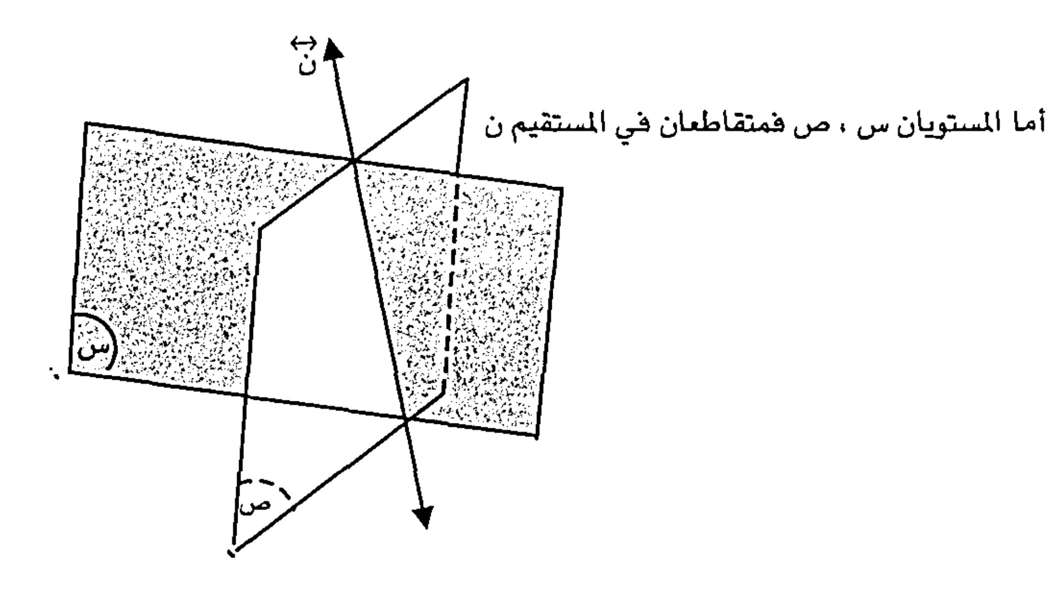
ونقول إنّ خطّين أو مستويين أو خط ومستوى متقاطعان إذا وجدت نقط مشتركة بينهما. فمثلاً:

$\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ مستقيمان متقاطعان في نقطة و.



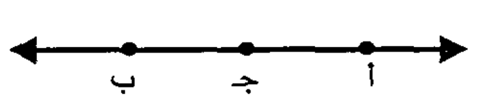
والمستقيم ل والمستوى س متقاطعان في نقطة هـ.

أما المستويان س ، ص فمتقاطعان في المستقيم ن



(١-٥) القطعة المستقيمة والشعاع:

في الشكل المجاور، النقط أ ، ب ، جـ ثلاث نقط مستقيمة، والنقطتان أ ، ب في جهتين مختلفتين من النقطة جـ على الخط المستقيم.
سنقول إن النقطة جـ واقعة بين النقطتين أ ، ب.



سنستخدم كلمة "بين" بهذا المعنى لتعريف كلمتين جديدتين هما القطعة المستقيمة والشعاع.

القطعة المستقيمة:

الشكل المجاور جزء من خط مستقيم مكوّن من النقطتين أ، ب وجميع النقط الواقعة بينهما.

ب أ

يُسمّى هذا الشكل قطعة مستقيمة ويرمز له بالرمز $\overline{\text{أ ب}}$ أو بالرمز $\overline{\text{ب أ}}$ وتسمّى النقطتان أ ، ب طرفا القطعة المستقيمة.

وتستخدم المسطرة لقياس أطوال القطع المستقيمة. ويرمز لطول $\overline{\text{أ ب}}$ بالرمز أ ب. فمثلاً في الشكل المجاور.

طول $\overline{\text{أ ب}}$ = أ ب = 5 سم

أ ب
0 1 2 3 4 5 6 7

تطابق قطعتين مستقيمتين

أ

ب

د جـ

في الشكل المجاور ، اذا قُصّت أب ووضعت بحيث ينطبق طرفها أ على الطرف جـ للقطعة جـد وانطبق الطرف ب على الطرف د عندها نقول إنّ القطعتين أب ، جـد متطابقتان ونكتب أب ≡ جـد ونقرأ أب تطابق جـد

والشرط الكافي حتى تكون قطعتان مستقيمتان متطابقتين هو تساوي طوليهما. اي أنّه:

تكون أب ≡ جـد إذا وفقط إذا كان أ ب = جـ د

ب جـ أ

أجـ ≡ جـب

جـ منتصف أب

والنقطة الواقعة على قطعة مستقيمة وتقسمها إلى قطعتين متطابقتين تسمّى منتصف القطعة المستقيمة.

مما سبق نجد أنّ الخواص الجوهرية لمفهوم القطعة المستقيمة هي:

(i) مجموعة من النقط المستقيمة.

(ii) مكوّنة من نقطتين مختلفتين وجميع النقط الواقعة بينهما.

وعلى ذلك يمكن تعريف القطعة المستقيمة كما يلي:

تعريف (٣): القطعة المستقيمة: هي مجموعة من النقط المستقيمة المكوّنة من نقطتين مختلفتين وجميع النقط الواقعة بينهما.

أما التطابق بين القطع المستقيمة فهو من نوع الخواص الثانوية العلاقيّة التي تصف علاقة بين قطعتين مستقيمتين (مثالين على مفهوم القطعة المستقيمة). وتعرف هذه العلاقة كما يلي:

تعريف (٤): تطابق قطعتين مستقيمتين: تكون قطعتان مستقيمتان متطابقتين اذا كانتا متساويتين في الطول.

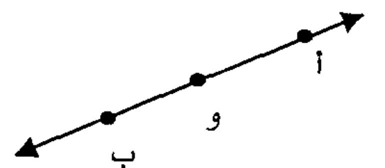
الشعاع

أ ب جـ

الشكل المجاور جزء من خط مستقيم مكوّن من أب وكل النقط جـ حيث تقع ب بين أ، جـ يسمّى هذا

الشكل شعاع، وتسمّى نقطة أ طرف الشعاع. ويُرمز للشعاع باستعمال نقطة الطرف وأيّ نقطة أخرى واقعة عليه ونكتب أب ونقرأ الشعاع أ ب ليعني الشعاع الذي طرفه نقطة أ ويمّر بالنقطة ب.

واذا اشترك شعاعان بطرف واحد وصنع اتحادهما خطاً مستقيماً وُصِفَ الشعاعان بالمتعاكسين. ففي الشكل (المجاور)،



الشعاعان وأ ، وب لهما طرف مشترك و ،

واتحادهما وأ ∪ وب = أب

فهما متعاكسان

وعلى ذلك، فالخواص الجوهرية لمفهوم الشعاع هي:

(١) مجموعة من النقط المستقيمة.

(٢) مكونة من نقطتين مختلفتين وما بينهما من نقط وكل نقطة تكون احدى الطرفين واقعة بينها وبين النقطة الأخرى.

وبناء على ذلك يمكن تعريف الشعاع كما يلي:

تعريف (٥) - الشعاع: إذا كانت أ ، ب نقطتين مختلفتين فإنّ الشعاع أب يُعرّف على أنّه مجموعة النقط المكونة من اتحاد أب مع مجموعة النقط التي تكون ب واقعة بين أي نقطة منها والنقطة أ.

أما تعاكس شعاعين فهي خاصية ثانوية علاقية تصف علاقة بين شعاعين.

(١-٦) مسلمات هندسة إقيدس*

من أجل دراسة الهندسة يجب معرفة مسلماتها، والمسلمات في هندسة إقليدس تحدد علاقات بين المفردات غير المعرفة فتخبرنا كيف ترتبط مجموعات مختلفة من النقاط مع بعضها.

والمسلمة الأولى تربط بين النقاط والمستقيمات.

مسلمة (١) : كل نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

* الصياغة الحديثة لهندسة اقليدس حدّدت (٢٣) مسلمة. انظر ملحق (١)

أما المسلمة الثانية فتربط ما بين النقاط والمستويات.

مسلمة (٢): كل ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

والمسلمتان ٣ ، ٤ التاليتان تحددان الحد الأدنى من النقاط الواقعة على خط مستقيم وفي مستو ما.

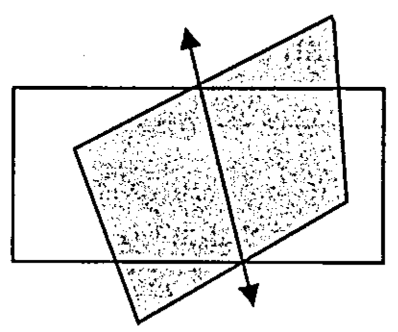
مسلمة (٣): كان مستقيم يحتوي نقطتين مختلفتين على الأقل.

مسلمة (٤): كل مستوى يحتوي ثلاث نقاط مختلفة على الأقل وغير مستقيمة.

مسلمة (٥) : إذا وقعت نقطتان مختلفتان في مستوى فإن الخط المار بهما يقع بالكامل في ذلك المستوى. ففي الشكل المجاور، إذا كانت أ، ب ∋ س

فإن أ↔ب ⊃ س

مسلمة (٦) : إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما خط مستقيم.



وبالإضافة إلى أن المسلمات تحدد علاقات بين المفردات غير المعرفة فتساعد على فهم معناها فإن المسلمات تعتبر الأساس الذي تشتق منه عبارات صحيحة أخرى يتم البرهنة على صحتها باستخدام قواعد المنطق الفرضي وتسمى مبرهنات. والمبرهنة التالية تتناول تقاطع مستقيمين.

مبرهنة (١): إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

البرهان: ليكن ل↔ ، م↔ مستقيمين مختلفين.

ولنفرض أنهما يتقاطعان في أكثر من نقطة (نقطتين مختلفتين أ ، ب على الأقل).

فتكون النقطتان أ ، ب واقعتين على كل من الخطين المختلفين ل↔، م↔

ولكن من مسلمة (١): لا يوجد سوى مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين مختلفتين.

∴ $\overleftrightarrow{ل} = \overleftrightarrow{م}$

وهذا يناقض الفرض بأن $\overleftrightarrow{ل} \neq \overleftrightarrow{م}$

∴ لا يمكن للخطين المختلفين أن يتقاطعا بأكثر من نقطة.

مبرهنة (٢): إذا تقاطع مستقيم ومستوى فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

البرهان: ليكن $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيم لا يقع في المستوى س

ولنفرض أن $\overleftrightarrow{ل}$ ، والمستوى س يتقاطعان في أكثر من نقطة (نقطتين مختلفتين أ، ب مثلاً)

فتكون النقطتان أ، ب واقعتين على الخط ل وواقعتين في المستوى س

ومن مسلمة (٥): بما أن أ ، ب واقعتان في المستوى س فإن $\overleftrightarrow{ل}$ المار بهما يقع بالكامل في المستوى س

وهذا يناقض الفرض بأن $\overleftrightarrow{ل}$ لا يقع في المستوى س

∴ لا يمكن للخط $\overleftrightarrow{ل}$ والمستوى س أن يتقاطعا بأكثر من نقطة.

مبرهنة (٣) : إذا وقعت نقطة خارج خط مستقيم فإنه يوجد مستوى واحد فقط يحتويهما.

البرهان: ليكن $\overleftrightarrow{ل}$ مستقيماً، ولتكن أ نقطة لا تقع على $\overleftrightarrow{ل}$

من مسلمة (٣) : يوجد على الأقل نقطتان مختلفتان ب ، جـ تقعان على $\overleftrightarrow{ل}$

∴ أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط مختلفة وغير مستقيمة.

ومن مسلمة (٢): يوجد مستوى واحد فقط س يمر بالنقط أ ، ب ، جـ.

وبما أن ب ، جـ تقعان في المستوى س

فإن المستقيم ل المار بهما يقع بالكامل في المستوى س

∴ س هو المستوى الوحيد الذي يحتوي على النقطة أ والمستقيم ل

سؤال: أثبت أنه:

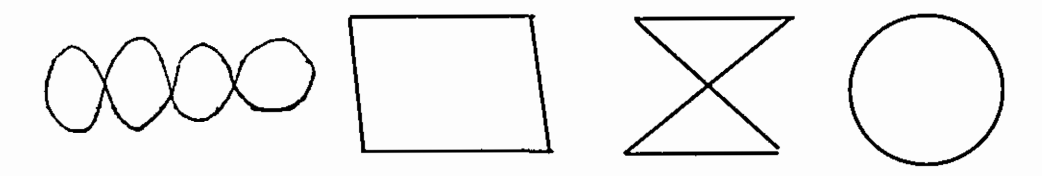
إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإنه يوجد مستوى واحد فقط يحتويهما.

(١-٧) المنحنى والمنحنى المغلق البسيط:

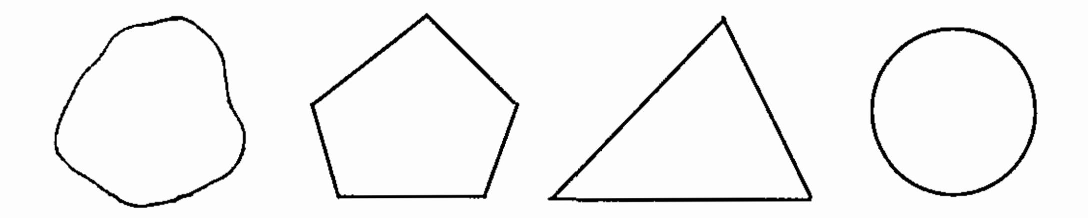
المنحنى مفهوم غير معرّف، يمكن وصفه، ولا يمكن تعريفه ويوصف المنحنى بهندسة اقليدس المستوية بأنّه الأثر الذي تتركه نقطة تتحرك في مستوى. والأشكال التالية منحنيات:



وإذا أمكن رسم منحنى بحيث نبدأ بنقطة ونعود إليها ثانية دون تغيير اتجاه الحركة سُمَّي منحنى مغلق والاشكال التالية منحنيات مغلقة.



وإذا لم يقطع المنحنى المغلق نفسه سُمَّي منحنى مغلق بسيط كالأشكال التالية.



لاحظ أنك اذا وضعت رأس القلم على أي نقطة من نقط المنحنى المغلق البسيط وحركت سنّ القلم على المنحنى فإنّك ستعود إلى نقطة البداية دون أن تمرّ على أيّ من نقطه اكثر من مرّة واحدة.

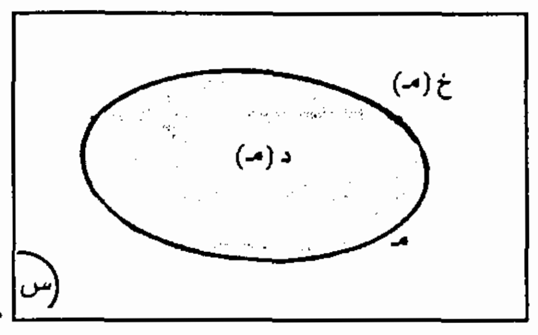
وكل منحنى مغلق بسيط (م) مرسوم في مستوى يقسم المستوى إلى ثلاثة أجزاء منفصلة:

١) مجموعة نقط المستوى التي تقع داخل المنحنى وتُسمّى المنطقة الداخليّة او داخليّة المنحنى، وسنرمز لها بالرمز د (م).

٢) مجموعة نقط المستوى التي تقع خارج المنحنى وتُسمّى المنطقة الخارجيّة أو خارجيّة المنحنى وسنرمز لها بالرمز خ (م).

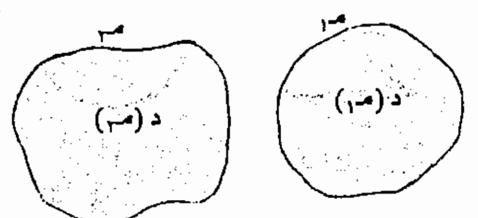
٣) مجموعة نقط المستوى المكوّنة للمنحنى (م). وكل نقطة منها لا تنتمي لداخليّة المنحنى ولا لخارجيته.

وقياس داخلية المنحنى المغلق البسيط مقدرة بوحدة متفق عليها يسمّى مساحة داخلية المنحنى.



تعريف (٦) - تكافؤ منطقتين:

ليكن $م_١$ ، $م_٢$ منحنيين مغلقين بسيطين تكون د ($م_١$) تكافىء د ($م_٢$) اذا وفقط إذا كانت مساحة د ($م_١$) = مساحة د ($م_٢$) .

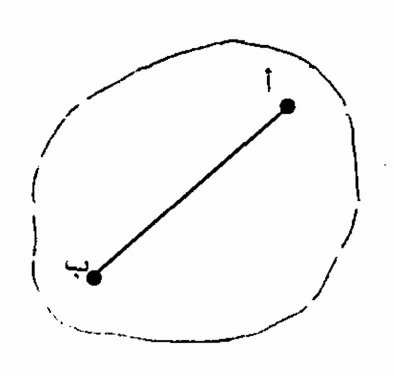


(١-٨) المنحنى المحدّب والمنحنى المقعّر:

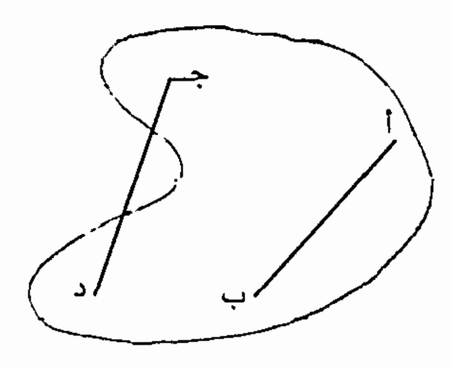
يُصنّف المنحنى المغلق البسيط إلى صنفين: منحنى محدّب ومنحنى مقعر.

ففي الشكل (١ -١ - أ) : القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين داخليتين تقع بالكامل داخل المنحنى.

يوصف هذا المنحنى بأنّه محدّب.



الشكل (١ -١ - ا)



الشكل (١-١-ب)

وفي الشكل (١-١-ب) يوجد على الأقل نقطتان داخليتان بحيث لا تقع القطعة المستقيمة الواصلة بينهما بالكامل داخل المنحنى.

يوصف هذا المنحنى بأنّه مقعّر.

تعريف (٧): يكون المنحنى المغلق البسيط (مـ)

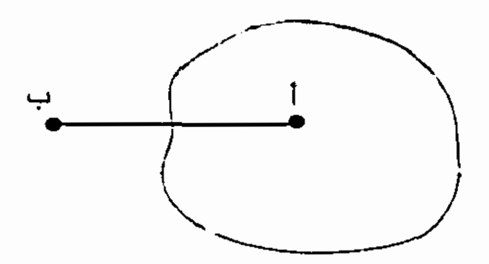
(١) محدّباً اذا تحقق الشرط التالي:

لكل نقطتين مختلفتين أ، ب ∋ د (مـ) تكون $\overline{\text{أ ب}}$ ⊂ د (مـ).

(٢) مقعراً اذا تحقق الشرط التالي:

يوجد على الأقل نقطتان مختلفتان أ، ب ∋ د (مـ) بحيث $\overline{\text{أ ب}}$ ⊄ د (هـ)

ومن خواص المنحنى المغلق أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطة داخليّة وأخرى خارجيّة تقطع المنحنى بنقطة على الأقل.



وسنتناول في الجزء الباقي من هذا الكتاب مفاهيم أساسيّة معرّفة نُحدّد خواصها الجوهريّة ونتعرّف على بعض خواصّها الثانوية التي يمكن استنتاجها من الخواص الجوهرية. وأول هذه المفاهيم هو الزاوية.

الوحدة الثانية

الزاوية

(٢-١) تعريف الزاوية

(٢-٢) قياس الزاوية ووحدة قياس الزوايا

(٢-٣) علاقات بين الزوايا

(٢-٤) التعامد والتوازي بين المستقيمات

(٢-٥) الزوايا الناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين.

(٢-١) الزاوية:

تُعرّف الزّاوية على أنّها اتحـاد شعاعين لهما طرف مشترك. فالخواص الجوهريّة لمفهوم الزاوية هي.

١) اتحاد شعاعين.

٢) الشعاعان لهما طرف مشترك.

ففي الشكل (٢-١) المجاور.

الشـعـاعـان و⃖أ ، و⃖ب يكوّنان زاوية

ويُرمز للزاوية باستعمال ثلاث نقط:

نقطة الطرف المشـتـرك للشـعـاعين ونقطة على كل شعاع منهما كما يلي:-

∡ أ و ب أو ∡ ب و أ

ويمكن أن يوضع رمز الزاوية فوق الحرف الدال على الطرف المشترك كما يلي:

أ و̂ ب أو ب و̂ أ

وإذا لم يكن مجـال للالتبـاس مع زوايا أخـرى يرمـز للزاوية باسـتـعـمـال نقطة الطرف المشترك فقط ونكتب ∡ و أو و̂

وعلى ذلك فإن ∡ أ و ب = و⃖أ ∪ و⃖ب

تُسمّى نقطة الطرف المشترك (و) رأس الزّاوية

ويسمّى الشعاعان و⃖أ ، و⃖ب ضلعا الزاوية

الشكل (٢-١)

لاحظ أنّ الزاوية تقسم المستوى المرسومة فيه إلى ثلاثة أجزاء منفصلة: الزاوية نفسها والجزءان الآخران أحدهما مظلّل والآخر غير مظلّل. يُسمّى أحدهما داخليّة الزاوية والآخر خارجيّة الزاوية.

يُشار لداخليّة الزاوية بوضع قوس بين ضلعي الزاوية

من الشكل (٢-١) أعلاه نجد أن

و ∈ أ و̂ ب ، د ∈ داخليّة أ و̂ ب، أ ∈ أ و̂ ب ، هـ ∈ خارجيّة أ و̂ ب.

ب ∈ أ و̂ ب ،

(٢ - ٢) قياس الزاوية ووحدة قياس الزوايا:

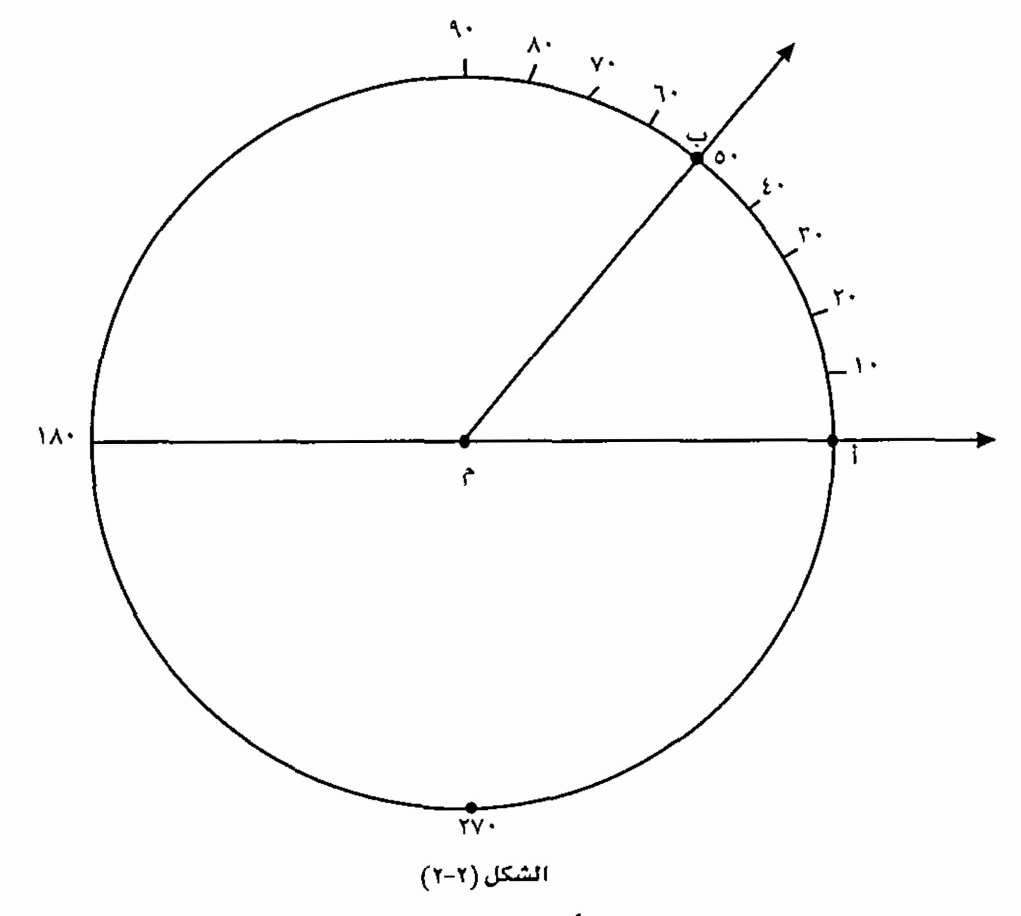
تقاس الزاوية بمقدار الانفراج بين ضلعيها وضمن داخليتها.

والسؤال هو : كيف نقيس هذا الانفراج؟

وما هي وحدة القياس؟

مقدار هذا الانفراج
هو قياس الزاوية

وللأجابة عن السؤالين السابقين، نرسم دائرة مركزها رأس الزاوية ونقسمها إلى اقواس متطابقة عددها 360 قوساً، فتكون الزاوية التي تحصر بين ضلعيها قوساً واحداً من



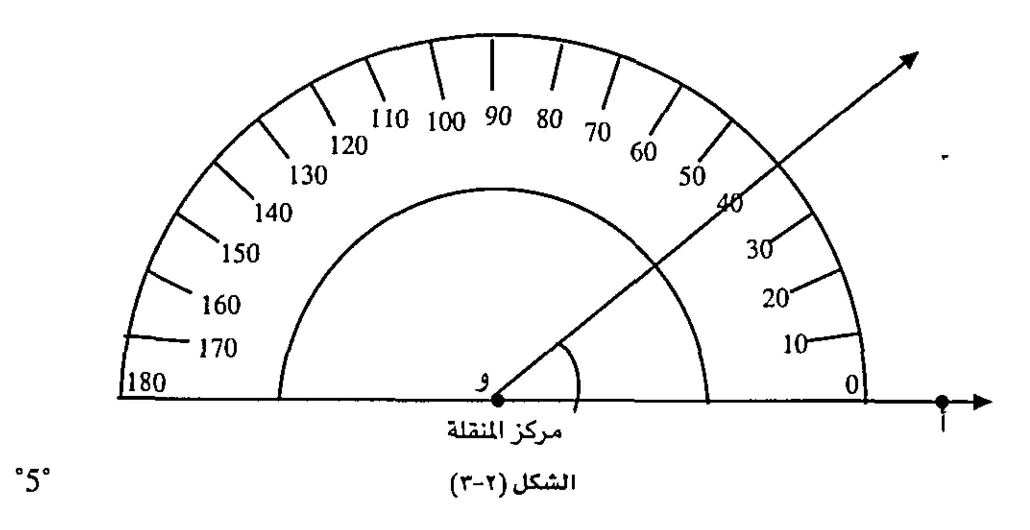
الشكل (٢-٢)

هذه الأقواس هي وحدة قياس الزوايا وتُسمّى درجة ويرمز لها بالرمز "١°" فالدرجة هي زاوية تحصر بين ضلعيها قوساً من دائرة مركزها هو رأس الزاوية وطوله يساوي 1/360 من طول الدائرة. وقياس أي زاوية هو عدد الأقواس المحصورة بين ضلعيها. ففي الشكل (٢-٢) أعلاه:

قياس أ مْ ب = ٥٠ْ

ويرمز لقياس أ مْ ب بالرمز ق (أ مْ ب).

وقد صُمّمت اداة خاصّة لقياس الزوايا تُسمّى المنقلة. وهي عبارة عن نصف دائرة مقسمة إلى ١٨٠ قوساً وعند استعمالها لقياس زاوية ما نجعل مركز المنقلة عند رأس الزاوية وحافتها المقابلة للتدريج صفر تنطبق على أحد ضلعي الزاوية فيكون التدريج - على المنقلة - والذي يشير اليه الضلع الآخر هو قياس الزاوية ففي الشكل (٢-٣) : ق (أ وْ ب) = ٤٠ْ



الشكل (٢-٣)

وتصنف الزوايا تبعاً لقياساتها إلى:

١) زاوية حادّة : هي زاوية قياسها أكبر من ٠ْ وأقل من ٩٠ْ

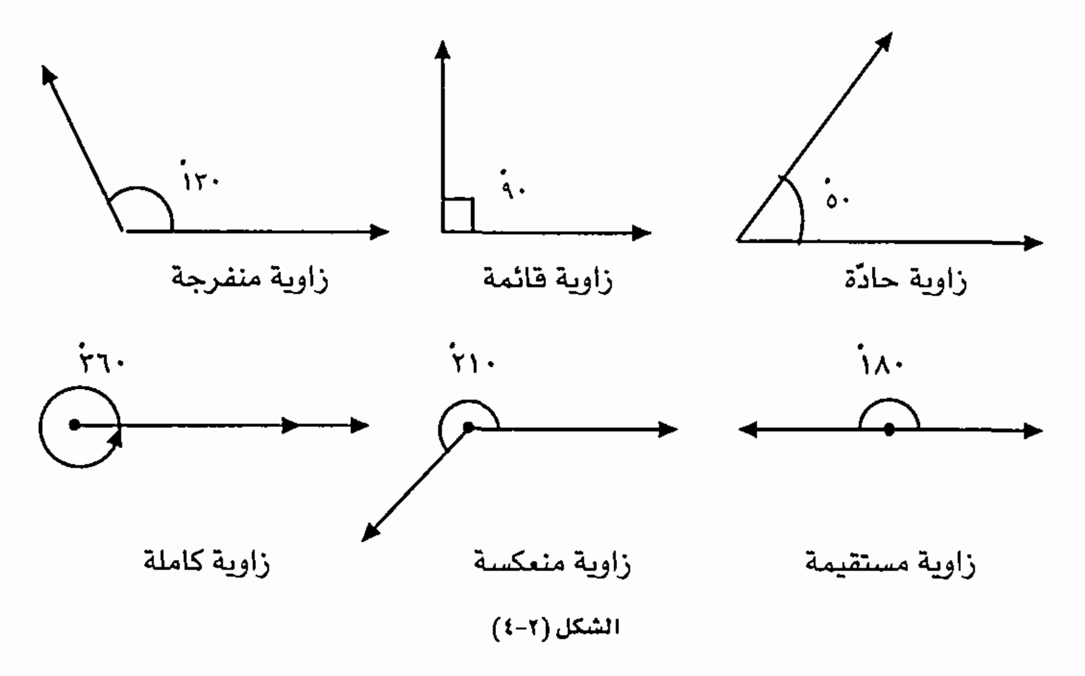
٢) زاوية قائمة: هي زاوية قياسها ٩٠ْ

٣) زاوية منفرجة : هي زاوية قياسها اكبر من ٩٠ْ وأقل من ١٨٠ْ

٤) زاوية مستقيمة: هي زاوية قياسها ١٨٠ْ

٥) زاوية منعكسة: هي زاوية قياسها اكبر من ١٨٠ْ وأقل من ٣٦٠ْ

أمّا اذا تطابق ضلعا الزاوية ومثل المستوى خارجيّة الزاوية فإنّ قياسها ٠ْ وتسمى زاوية صفريّة واذا مثل المستوى داخليّة الزاوية فإن قياسها ٣٦٠ْ وتسمّى زاوية كاملة.



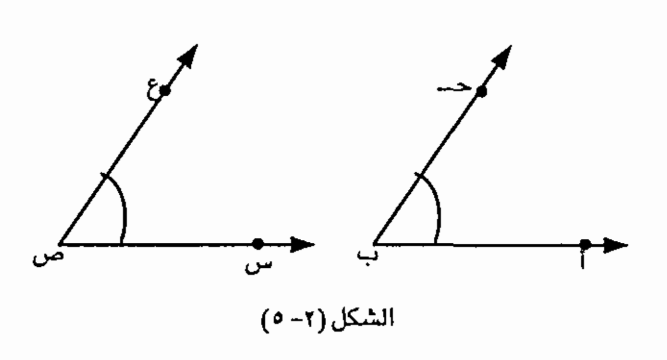
الشكل (٢-٤)

(٢-٣) علاقات بين الزوايا :

ترتبط الزوايا مع بعضها بعلاقات نورد بعضها فيما يلي:

(١) التطابق

في الشكل المجاور إذا قُصت الزاوية س ص ع ووضعت بحيث ينطبق رأسها ص على رأس الزاوية أ ب جـ، والضلع $\overleftarrow{\text{ص س}}$ ينطبق على $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ وانطبق الضلع $\overleftarrow{\text{ص ع}}$ على $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ أيضاً، عندها



الشكل (٢- ٥)

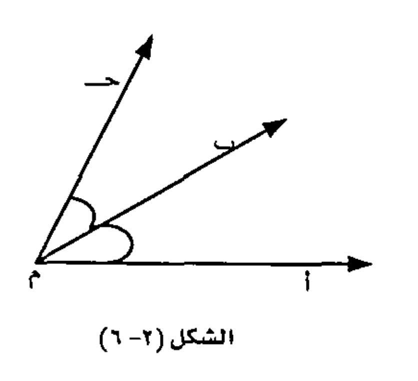
نقول إن الزاويتين أ $\hat{\text{ب}}$ جـ ، س $\hat{\text{ص}}$ ع متطابقتان. والشرط الكافي حتى تتطابق زاويتان هو تساوي قياسيهما.

أي أنّه،

تكون أ $\hat{\text{ب}}$ جـ ≡ س $\hat{\text{ص}}$ ع اذا كان ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع)

ومن تعريف الزاوية القائمة نجد أنّ: **جميع الزوايا القائمة متطابقة.**

(٢) التجاور:



الشكل (٢- ٦)

في الشكل (٢-٦) المجاور؛

أ م̂ ب ، ب م̂ جـ زاويتان لهما

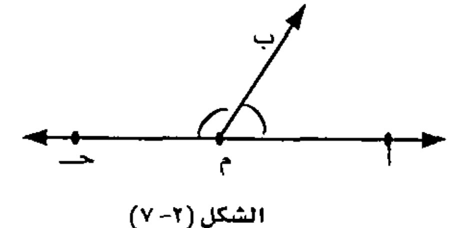
رأس مشترك م ، وضلع مشترك م ب

وداخليتاهما منفصلتان.

توصف هاتان الزاويتان بأنّهما متجاورتان.

وبشكل عام:

تكون زاويتان مرسومتان في مستوى واحد متجاورتين اذا كان لهما رأس مشترك وبينهما ضلع مشترك وداخليتاهما منفصلتين.

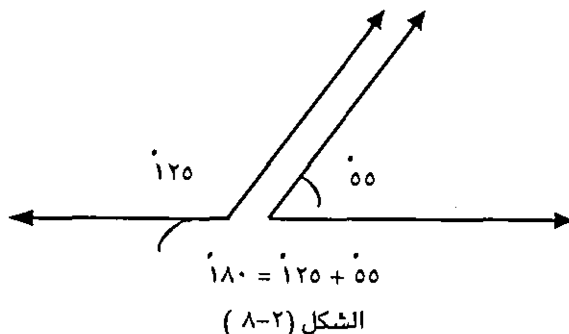


الشكل (٢- ٧)

وإذا كان الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين متعاكسين وصفت الزاويتان بأنّهما على خط مستقيم.

ففي الشكل (٢-٧): الزاويتان أ م̂ ب، ب م̂ جـ متجاورتان وضلعاهما غير المشتركين م أ ، م جـ متعاكسان فهما زاويتان متجاورتان عل خط مستقيم.

(٣) التكامل:



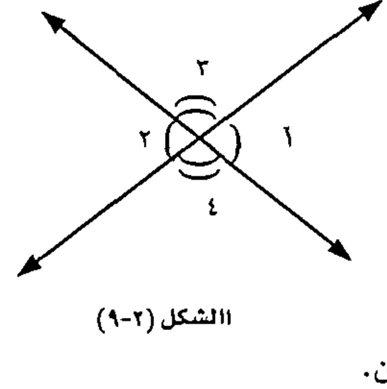
الشكل (٢-٨)

تكون زاويتان متكاملتين اذا كان مجموع قياسيهما ١٨٠° ونقول إنّ كل زاوية منهما مكمّلة للأخرى.

نتيجة (١) : مكمّلات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة.

نتيجة (٢) : الزوايا المتجاورة على خط مستقيم تكون متكاملة.

(٤) التقابل بالرأس:



الشكل (٢-٩)

تكون زاويتان متقابلتين بالرأس إذا كان لهما راس مشترك وأضلاعهما متعاكسة.

ففي الشكل (٢-٩)؛ مستقيمان متقاطعان نتج عنهما زوجان من الزوايا المتقابلة بالرأس هما:

الزاويتان $\hat{١}$ ، $\hat{٢}$ والزاويتان $\hat{٣}$ ، $\hat{٤}$

نتيجة (٣) : كل زاويتين متقابلتين بالرأس متطابقتان.

البرهان: في الشكل (٢-٩) أعلاه؛

الزاويتان $\hat{١}$ ، $\hat{٣}$ متجاورتان على خط مستقيم

∴ $\hat{١}$ مكمّلة لـ $\hat{٣}$

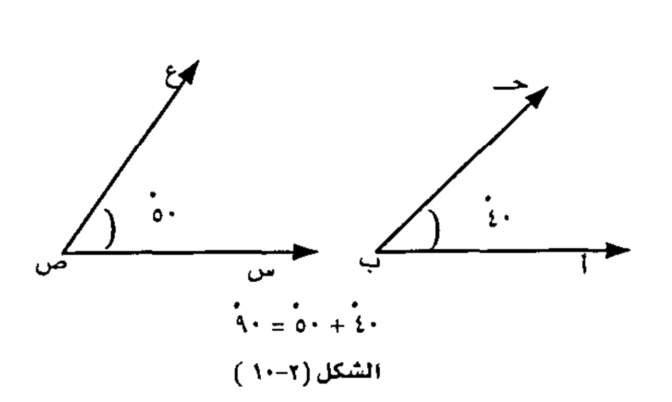
والزاويتان $\hat{٢}$ ، $\hat{٣}$ متجاورتان على خط مستقيم

∴ $\hat{٢}$ مكملة لـ $\hat{٣}$

∴ $\hat{١}$ ≅ $\hat{٢}$ لأنهما مكملتان لزاوية واحدة.

(٥) التتام:

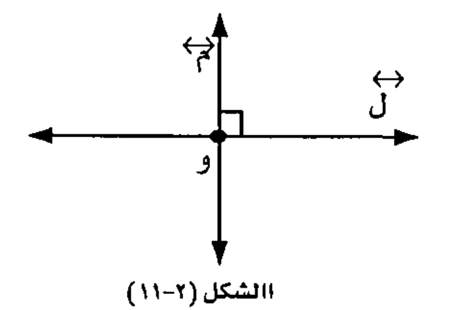
تكون زاويتان متتامتين إذا كان مجموع قياسيهما ٩٠°، ونقول إنّ كل زاوية منهما متمّمة للأخرى.



٤٠° + ٥٠° = ٩٠°

الشكل (٢-١٠)

(٢-٤) التعامد والتوازي بين المستقيمات:



الشكل (٢-١١)

(١) في الشكل (٢-١١) المجاور، ل ، م مستقيمان متقاطعان في نقطة و. واحدى الزوايا الأربع الناتجة عن تقاطعهما قائمة.

يوصف هذان المستقيمان بأنّهما متعامدان .

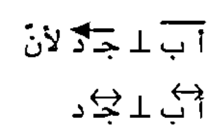
تعريف المستقيمان المتعامدان:

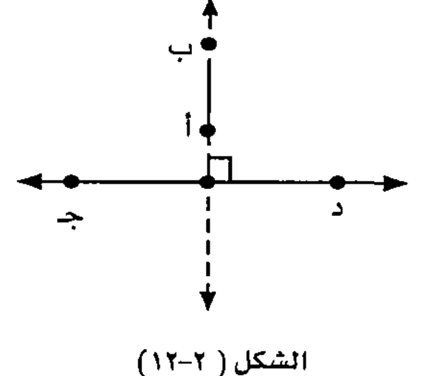
يكون مستقيمان متقاطعان متعامدين إذا كانت احدى الزوايا الناتجة عن تقاطعهما قائمة.

نتيجة: إذاً كان المستقيمان المتقاطعان متعامدين فإنّ الزوايا الأربع الناتجة عن تقاطعهما قوائم.

ويستخدم الرمز "⊥" للدلالة على تعامد مستقيمين. ففي الشكل (٢-١١) يكون ل ⊥ م ويُقرأ ل عمودي على م أو ل ، م مستقيمان متعامدان".

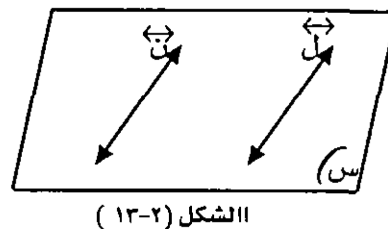
وتكون أجزاء المستقيمات (قطع مستقيمة أو أشعة) متعامدة إذا كانت المستقيمات التي تحتويها متعامدة. ففي الشكل (٢-١٢):





الشكل (٢-١٢)

(٢) في الشكل (٢-١٣):



الشكل (٢-١٣)

المستقيمان ل ، ن الواقعان في المستوى س لا يتقاطعان.

يوصف هذان المستقيمان بأنّهما متوازيان.

يستخدم الرمز "//" للدلالة على توازي مستقيمن.

ففي الشكل (٢-١٣) يكون

$\overleftrightarrow{ل} // \overleftrightarrow{ن}$ ويُقرأ "$\overleftrightarrow{ل}$ يوازي $\overleftrightarrow{ن}$" أو $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ن}$ مستقيمان متوازيان"

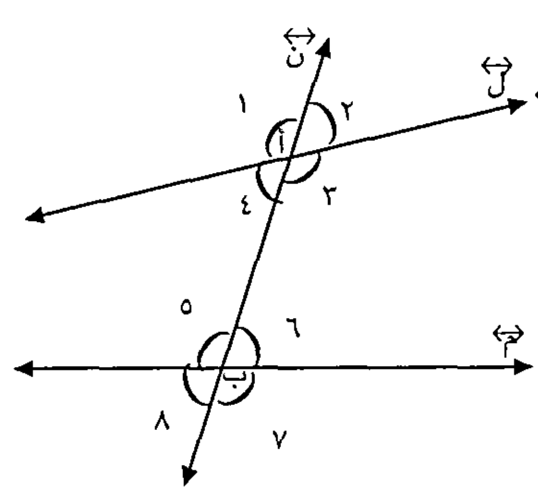
تعريف - المستقيمان المتوازيان:

يكون المستقيمان ل ، ن متوازيين إذا كانا مستويين وغير متقاطعين، أي $\overleftrightarrow{ل} \cap \overleftrightarrow{ن} = \Phi$ أو $\overleftrightarrow{ل} = \overleftrightarrow{ن}$

وتكون أجزاء المستقيمات متوازية إذا كانت المستقيمات التي تحتويها متوازية.

(٢-٥) الزوايا الناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين:

إذا قطع مستقيم "مستقيمين مستويين في نقطتين مختلفتين سُمِّي هذا المستقيم قاطع. ففي الشكل (٢-١٤) ، $\overleftrightarrow{ن}$ يقطع $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ في النقطتين المختلفتين أ ، ب، لذلك فهو قاطع لهما.



الشكل (٢-١٤)

وعندما يقطع مستقيم مستقيمين مستويين فإنّ ثمان زوايا تنتج عن هذا التقاطع. وتعطى أسماء مختلفة لبعض المجموعات الجزئية من هذه الزوايا:

١) زوايا داخليّة وهي الزوايا $\hat{٣}$ ، $\hat{٤}$ ، $\hat{٥}$ ، $\hat{٦}$

٢) زوايا خارجيّة وهي الزوايا $\hat{١}$ ، $\hat{٢}$ ، $\hat{٧}$ ، $\hat{٨}$

٣) زاويتان متبادلتان داخلياً وهما زاويتان داخليتان وفي جهتين مختلفتين من القاطع وغير متجاورتين. مثل:

الزاويتان $\hat{٣}$ ، $\hat{٥}$ ؛ والزاويتان $\hat{٤}$ ، $\hat{٦}$

٤) زاويتان متبادلتان خارجيّاً، وهما زاويتان خارجيتان وفي جهتين مختلفتين من القاطع وغير متجاورتين، مثل

الزاويتان $\hat{٢}$ ، $\hat{٨}$ ؛ والزاويتان $\hat{١}$ ، $\hat{٧}$.

٥) زاويتان متناظرتان وهما زاويتان إحداهما داخليّة والأخرى خارجيّة وفي جهة واحدة من القاطع وغير متجاورتين، مثل

الزاويتان $\hat{١}$ ، $\hat{٥}$ ، والزاويتان $\hat{٢}$ ، $\hat{٦}$

والزاويتان $\hat{٣}$ ، $\hat{٧}$ ، والزاويتان $\hat{٤}$ ، $\hat{٨}$

٦) زاويتان متحالفتان داخليّاً وهما زاويتان داخليتان وفي جهة واحدة من القاطع مثل: الزاويتان $\hat{٣}$ ، $\hat{٦}$ ؛ والزاويتان $\hat{٤}$ ، $\hat{٥}$

٧) زاويتان متحالفتان خارجيّاً وهما زاويتان خارجيتان وفي جهة واحدة من القاطع، مثل الزاويتان $\hat{٢}$ ، $\hat{٧}$ ، والزاويتان $\hat{١}$ ، $\hat{٨}$

سؤال: في الشكل (٢-١٥) المجاور؛

اذكر العلاقة بين كل زوج من أزواج الزوايا التالية:

١) $\hat{١}$ ، $\hat{٥}$:

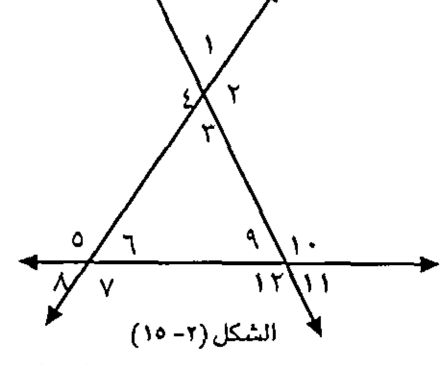
٢) $\hat{٣}$ ، $\hat{٩}$:

٣) $\hat{٢}$ ، $\hat{٨}$:

٤) $\hat{٧}$ ، $\hat{٩}$:

٥) $\hat{٩}$ ، $\hat{٩}$:

٦) $\hat{٥}$ ، $\hat{١٠}$:



الشكل (٢- ١٥)

وترتبط أزواج من هذه الزوايا بعلاقات عندما يكون المستقيمان متوازيين. والنظرية التالية تحدّد هذه العلاقات.

نظريّة (١) : اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ

(١) كل زاويتين متبادلتين (داخلياً أو خارجيّاً) متطابقتان

(٢) كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

(٣) كل زاويتين متحالفتين (داخليّاً أو خارجيّاً) متكاملتان

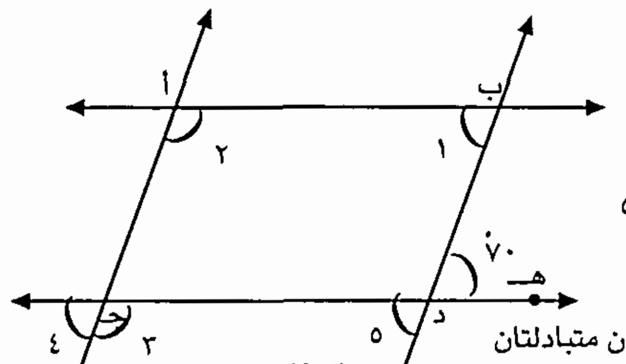
وعكس هذه النظريّة صحيح أيضاً.

عكس النظرية (١): إذا قُطع مستقيمان بقاطع ووجدت:

(١) زاويتان متناظرتان متطابقتان فإنّ المستقيمين متوازيان.

(٢) زاويتان متبادلتان (داخلياً أو خارجياً) متطابقتان فإن المستقيمين متوازيان.

(٣) زاويتان متحالفتان (داخليّاً أو خارجيّاً) متكاملتان فإنّ المستقيمين متوازيان



الشكل (٢-١٦)

مثال: في الشكل المجاور،

أب // جـد ، أجـ // ب د

ق (ب د̂ هـ) = ٧٠° أوجد قياس

كل من الزوايا : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

الحل:

ق (١̂) = ق (ب د̂ هـ) = ٧٠° زاويتان متبادلتان داخلياً

ق (٢̂) + ق (١̂) = ١٨٠° زاويتان متحالفتان

∴ ق (٢̂) = ١١٠°

ق (٣̂) = ق (٢̂) = ١١٠° زاويتان متناظرتان

ق (٤̂) = ق (ب د̂ هـ) = ٧٠° زاويتان متبادلتان خارجيّاً

ق (٥̂) = ق (ب د̂ هـ) = ٧٠° زاويتان متقابلتان بالرأس.

مسلمة التوازي: في حوالي ٣٠٠ قبل الميلاد، نظمّ اقليدس المعارف الهندسيّة التي كانت معروفة في ذلك الوقت في نظام يقوم على المسلمات. وقد كتب اقليدس خمس مسلمات، كانت المسلمات الأربع الأولى من البساطة والوضوح بحيث لم تُثر تساؤلات لدى الرياضيين. أما المسلمة الخامسة فقد كانت أكثر تعقيداً، فأثارت جدلاً كبيراً بين الرياضيين ولفترة طويلة من الزمن، حيث اعتبرها البعض نظرية يمكن برهنتها، وحاولوا ذلك؛ ولكن جميع محاولاتهم كان يثبت عدم صحتها لسبب أو لآخر. والنص التالي هو أحد العبارات المكافئة للعبارة التي وضعها اقليدس.

مسلمة التوازي: من نقطة خارج مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمرّ بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

مثال: أثبت أنّ مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°

البرهان: ليكن أ ب جـ مثلثاً.

بما أنّ أ نقطة خارج المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

فإننا نستطيع رسم مستقيم واحد فقط يمرّ بالنقطة أ ويوازي $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، وليكن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$.

بما أن الزوايا $\hat{١}$ ، $\hat{٢}$ ، $\hat{٣}$ متجاورة على خط مستقيم فإن:

ق ($\hat{١}$) + ق ($\hat{٢}$) + ق ($\hat{٣}$) = ١٨٠° .... (١)

لكن ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٥}$) زاويتان متبادلتان داخليتان

ق ($\hat{٣}$) = ق ($\hat{٤}$) زاويتان متبادلتان داخليتان.

وبالتعويض في (١) نجد أنّ:

ق ($\hat{٥}$) + ق ($\hat{٢}$) + ق ($\hat{٤}$) = ١٨٠°

أي أن مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب جـ يساوي ١٨٠°.

الوحدة الثالثة

الدائرة

(٣-١) تعريف الدائرة

(٣-٢) الزاوية المحيطية والزاوية المركزيّة.

(٣-٣) مماس الدائرة.

(٣-٤) محيط الدائرة ومساحة المنطقة الدائرية.



(٣-١) الدائرة:

هي منحنى مغلق بسيط جميع نقطه على بُعدٍ ثابت من نقطة معلومة. تُسمّى النقطة المعلومة مركز الدائرة، ويُسمّى البعد الثابت بين أيّ نقطة على الدائرة ومركزها طول نصف قطر الدائرة ويُرمز له بالرمز نق. وكل قطعة مستقيمة واصلة بين نقطة على الدائرة ومركزها تُسمّى نصف قطر للدائرة.

ففي الشكل (٣-١)،

المنحنى مـ دائرة،

والقطعة المستقيمة أ م نصف قطر للدائرة.

مما سبق نجد أن الخواص الجوهريّة

المميزة للدائرة هي:

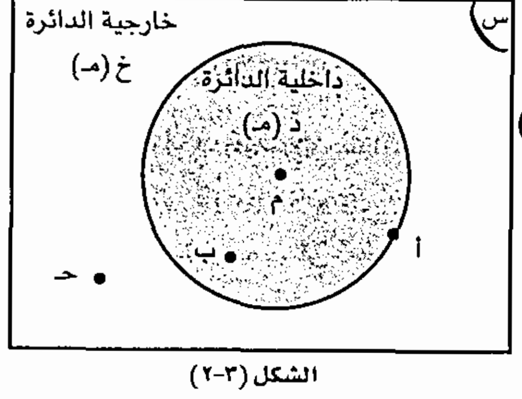
الشكل (٣-١)

١) منحنى مغلق بسيط.

٢) جميع نقط الدائرة على بُعد ثابت (نق) من نقطة معلومة بداخله.

ولأنّ الدائرة منحنى مغلق بسيط فإنّها تقسم المستوى المرسومة فيه إلى ثلاثة أقسام منفصلة:

- الدائرة مـ
- داخليّة الدائرة أو المنطقة الدائّرية د (مـ)
- خارجيّة الدائرة خ (مـ)



الشكل (٣-٢)

ففي الشكل (٣-٢):

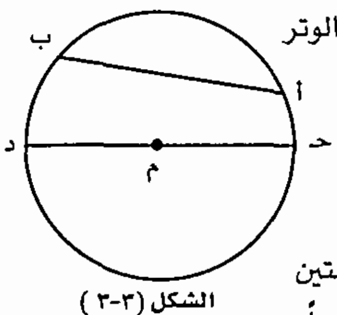
أ ∋ مـ ، ب ∋ د (مـ)

جـ ∋ خ (مـ) ، م ∋ د (مـ)

مما سبق نلاحظ أنّ اي دائرة تتحدّد بتعيين مركزها وطول نصف قطرها.

تعريف - الوتر:

كلُّ قطعة مستقيمة يقع طرفاها على دائرة تُسمّى وتراً في الدائرة. واذا مرّ وترٌ بمركز الدائرة سُمّي قطر في الدائرة.

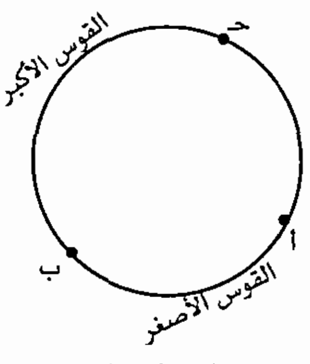
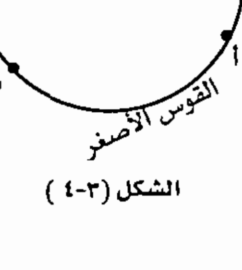


الشكل (٣-٣)

ففي الشكل (٣-٣)؛ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران في الدائرة مـ ولأنّ الوتر $\overline{\text{حـ د}}$ يمّر بمركز الدائرة (م) فإنّه قطرٌ فيها.

تعريف - القوس الدائري.

إذا كـانت أ ، ب نقطتين على دائرة مـ فـإنّ هاتين النقطتين تقسمان الدائرة إلى جزأين، كل جزء منهما يُسمّى قوساً دائرياً. فالقوس الدائري جزء من دائرة مكوّن من نقطتين على دائرة وجميع النقط بينهما على الدائرة.

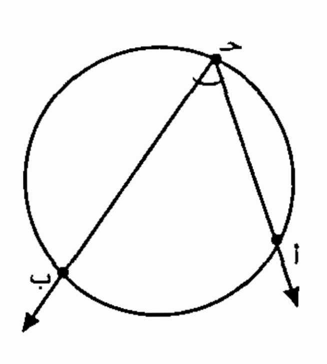



الشكل (٣-٤)

يُسمّى الجزء الأقصر القوس الدائري الأصغر ويُرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$، أمّا الجزء الأطول فيسمّى القوس الدائري الأكبر ولتسميته نستعمل نقطة ثالثة عليه مثل جـ، ونرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$.

وإذا كانت النقطتان أ ، ب طرفي قطر في الدائرة فإنهما تقسمانها إلى قوسين متطابقين. ولذلك يعتبران قوسين كبيرين ويُسميّان باستعمال ثلاث نقط.

(٣ - ٢) الزاوية المحيطيّة والزاوية المركزيّة:



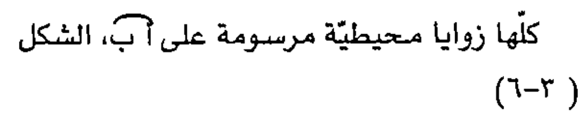
الشكل (٣-٥)

اذا كانت أ، ب نقطتين مختلفين على دائرة. فإنهما تقسمانها إلى قوسين دائريين. وإذا رسمت زاوية أ جـ ب بحيث يقع رأسها حـ على أحد القوسين وتحصر بين ضلعيها (في داخليتها) القوس الآخر كما في الشكل (٣-٥) فإنها تُسمّى زاوية محيطيّة مرسومة على القوس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$.

تعريف - الزاوية المحيطيّة :

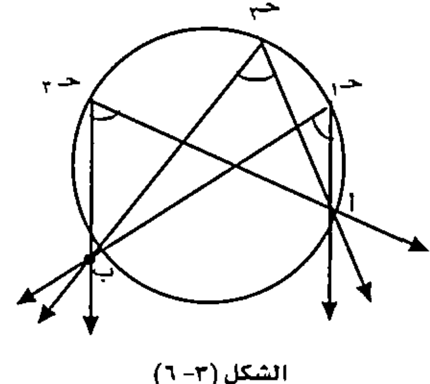
هي زاوية يقع رأسها على دائرة وضلعاها يقطعان الدائرة في نقطتين مختلفتين.

ويمكن رسم عدد لا نهائي من الزوايا المحيطيّة على أيّ قوس من دائرة. فالزوايا أ جَ١ ب، أ جَ٢ ب ، أ جَ٣ ب، ....



كلّها زوايا محيطيّة مرسومة على أ⌒ب، الشكل (٣-٦)

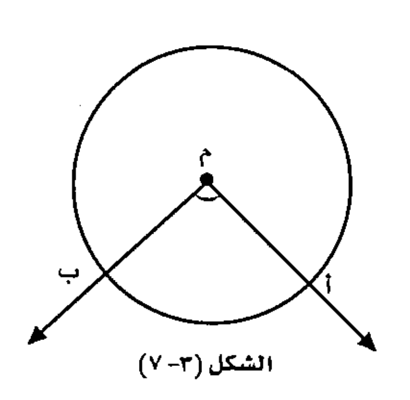
والنظريّة التالية تصف علاقة بين الزوايا المحيطيّة المرسومة على قوس واحد.



الشكل (٣- ٦)

نظريّة (١): الزوايا المحيطيّة المرسومة على قوس واحد في دائرة تكون متطابقة.

واذا رسمت الزاوية أ مَ ب بحيث كان رأسها (م) عند مركز الدائرة وضلعاها يحصران القوس أ⌒ب، فإنّها تُسمّى زاوية مركزية مرسومة على القوس أ⌒ب. انظر الشكل (٣-٧)



الشكل (٣- ٧)

والنظريّة التالية تصف علاقة بين قياسي الزاويتين المحيطيّة والمركزيّة المرسومتين على قوس واحد.

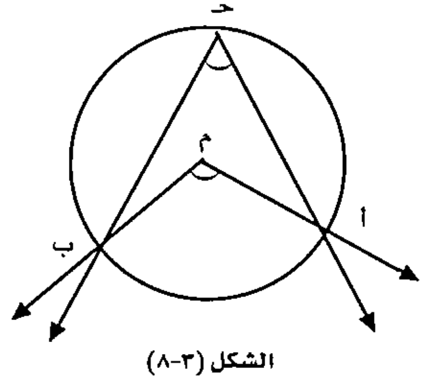
نظريّة (٢): قياس الزاوية المركزيّة المرسومة على قوس في دائرة يساوي ضعفي قياس الزاوية المحيطيّة المرسومة على القوس نفسه.

ففي الشكل (٣-٨)،

أ جَ ب زاوية محيطيّة مرسومة على أ⌒ب، أ مَ ب زاوية مركزية مرسومة على القوس أ⌒ب نفسه.

فيكون ق (أ مَ ب) = ٢× ق (أ جَ ب)

نتيجة : الزاوية المحيطيّة المرسومة على نصف دائرة تكون قائمة.



الشكل (٣-٨)

ففي الشكل (٣-٩)

أ ب قطر في الدائرة، والزاويتان:

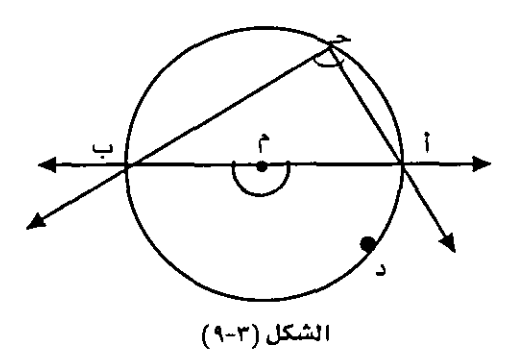
المركزية أ مٓ ب والمحيطيّة أ جٓـ ب مرسومتان

على القوس أ د ب (نصف دائرة)

∴ ق (أ جٓـ ب) = ١/٢ × ق (أ مٓ ب)

= ١/٢ × ١٨٠° لأنّ أ مٓ ب زاوية مستقيمة.

= ٩٠°

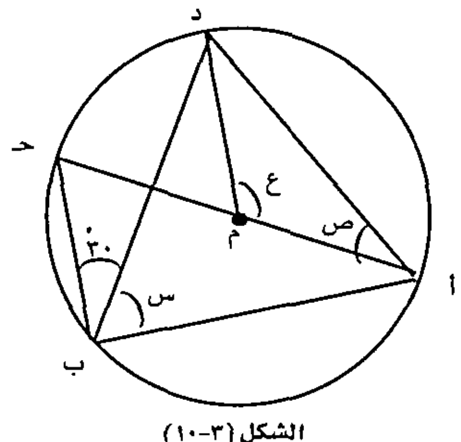


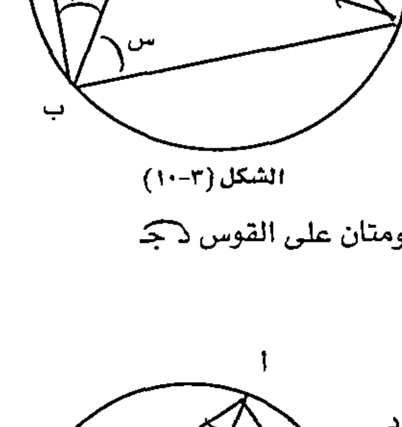
الشكل (٣-٩)

مثال : في الشكل (٣-١٠) المجاور

إذا كان أجـ قطراً في الدائرة،

وكان ق (د بٓ جـ) = ٣٠° فأوجد كلاً من س، ص، ع.




الشكل (٣-١٠)

الحل: بما أنّ أ بٓ جـ زاوية محيطيّة مرسومة على نصف دائرة أ د جـ فإنّ

ق (أ بٓ جـ) = ٩٠°

∴ س + ٣٠° = ٩٠° ومنها س = ٦٠°

وبما أنّ الزاويتين د أٓ جـ ، د بٓ جـ محيطيتان مرسومتان على القوس د جـ

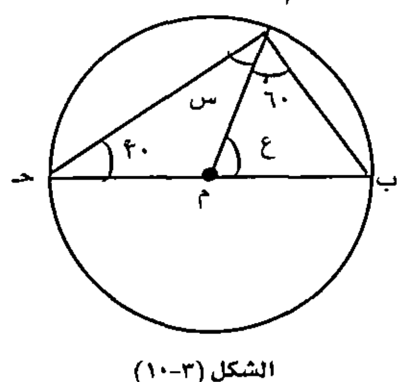
فإنّ ق (د أٓ جـ) = ق (د بٓ جـ)

∴ ص = ٣٠°

وبما أنّ الزاويتين؛ المركزيّة أ مٓ د، والمحيطيّة أ بٓ د مرسومتان على القوس أ د فإنّ

ق (أ مٓ د) = ٢ × ق (أ بٓ د)

∴ ع = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°



الشكل (٣-١٠)

سؤال : في الشكل (٣-١١) المجاور،

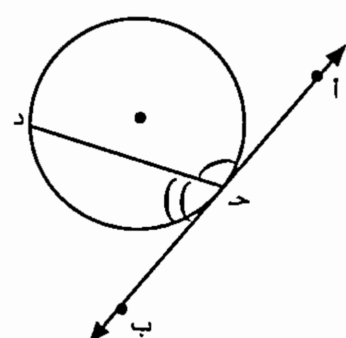
أوجد كلاً من س ، ع.

(٣-٣) مماس الدائرة

يُعّرف مماس الدائرة على أنّه خط مستقيم يقع في مستوى الدائرة ويقطعها بنقطة واحدة فقط تُسمّى نقطة التماس.

الشكل (٣-١٢)

وإذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماساً لدائرة عند النقطة جـ، وكان $\overline{\text{جـ د}}$ وتراً في الدائرة. فإنّنا نُسمِّي كلاً من الزاويتين أ $\hat{\text{جـ}}$ د ، ب $\hat{\text{جـ}}$ د زاوية مماسيّة. انظر الشكل (٣-١٣)



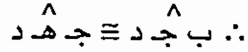
الشكل (٣-١٣)

والنظريّة التالية تُحدِّد علاقة بين الزوايا المماسيّة والزوايا المحيطيّة.

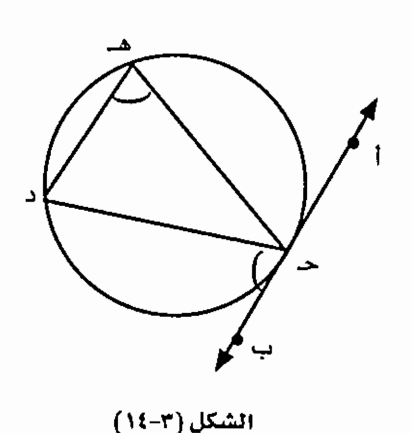
نظرية (٣):

الزاوية المماسيّة تطابق الزاوية المحيطيّة المرسومة في الجهة الأخرى من الوتر.

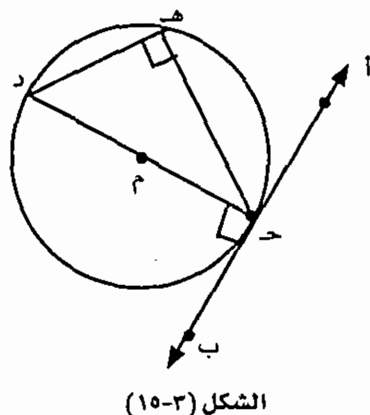
ففي الشكل (٣-١٤)، لاحظ أنّ الزاوية المماسيّة ب $\hat{\text{جـ}}$ د والزاوية المحيطيّة جـ $\hat{\text{هـ}}$ د في جهتين مختلفتين من الوتر $\overline{\text{جـ د}}$



$\therefore$ ب $\hat{\text{جـ}}$ د $\cong$ جـ $\hat{\text{هـ}}$ د



الشكل (٣-١٤)



الشكل (٣-١٥)

وإذا كان جـ د قطراً في دائرة فإنّ أيّ زاوية محيطيّة مرسومة على هذا القطر تكون قائمة، أيّ أنّ

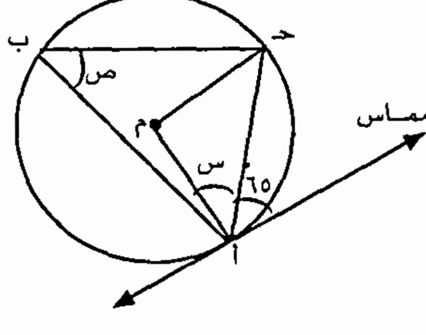
ق (جـ هـ^ د) = ٩٠°

وبما أنّ ب جـ^ د ≅ جـ هـ^ د فإنّ

ق (ب جـ^ د) = ٩٠°

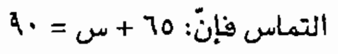
أي أنّ المماس يكون عمودياً على القطر المنتهي عند نقطة التماس (يُسمّى قطر التماس)

مثال (٢) : في الشكل (٣-١٦) المجاور، أوجد كلاً من س ، ص



الشكل (٣-١٦)

الحل: بما أنّ المماس عموديّ على نصف قطر


التماس فإنّ: ٦٥ + س = ٩٠

∴ س = ٢٥°

وبما أنّ الزاوية المماسيّة تطابق الزاوية المحيطيّة المرسومة في الجهة الأخرى من القاطع

فإن ص = ٦٥°

(٣ - ٤) محيط الدائرة ومساحة المنطقة الدائريّة.

للدائرة خواص ثانوية ثابتة نذكر منها:

(١) إذا رمزنا لطول الدائرة بالرمز ح ولطول نصف قطرها بالرمز نق. فإنّ النسبة بين طول الدائرة وطول قطرها نسبة ثابتة يُرمز لها بالرمز π (ويقرأ باي) وهي عدد غير نسبي يساوي تقريباً $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣.١٤

أي أن $\frac{ح}{٢نق} = \pi$ ومنها ح = ٢ π نق

يُسمّى طول الدائرة محيط الدائرة.

فمثلاً:

محيط الدائرة التي طول نصف قطرها ١٤سم = ٢ × $\frac{22}{7}$ × ١٤ = ٨٨ سم

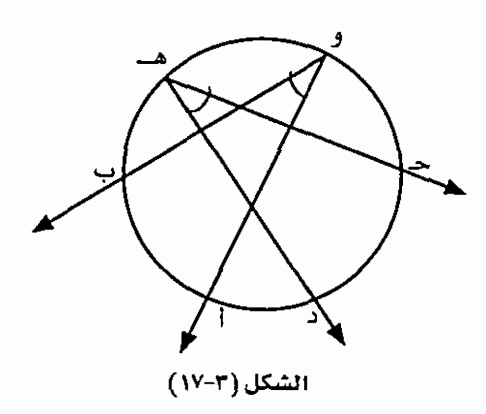
(٢) مساحة المنطقة الدائريّة (أو داخليّة الدائرة) = π نق٢

(٣) الزوايا المحيطيّة المرسومة على اقواس متطابقة تكون متطابقة. والعكس صحيح

ففي الشكل (٣-١٧):

اذا كانت أ^و ب ≅ جـ^هـ د فإنّ ⌒أ ب ≅ ⌒جـ د

وكذلك اذا كان ⌒أ ب ≅ ⌒جـ د فإنّ أ^و ب ≅ جـ^هـ د.



الشكل (٣-١٧)

الوحدة الرابعة

المضلعات

(٤-١) تعريف المضلع

(٤-٢) الزاوية الخارجيّة

(٤-٣) تطابق المضلعات وتشابهها

(٤-٤) المثلث: - تعريف المثلث

- تطابق المثلثات
- خواص ثانوية ثابتة
- خواص ثانوية متغيرة

(٤-٥) الأشكال الرباعية:

- تعريف الشكل الرباعي
- شبه المنحرف
- متوازي الأضلاع
- المستطيل
- المعين
- المربع

المضلعات

سنتناول في هذه الوحدة نوعاً خاصّاً من المنحنيات المغلقة البسيطة تُسمّى مضلعات والتعريف التالي يوضح هذا المفهوم.

(٤-١) تعريف المضلع:

هو منحنى مغلق بسيط مكوّن من قطع مستقيمة

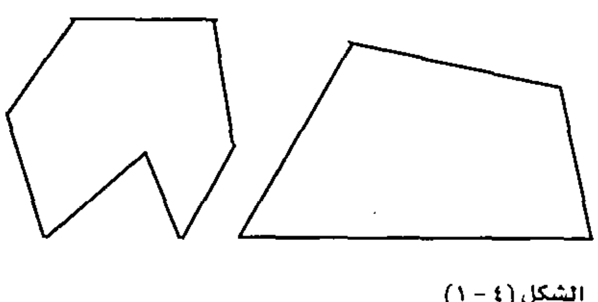
من هذا التعريف نجد أنّ الخواص المميّزة لمفهوم المضلع هي:

١) منحنى مغلق بسيط.

٢) ناتج عن اتحاد قطع مستقيمة.

تُسمّى القطع المستقيمة أضلاع المضلّع، وتُسمى نقط تقاطع الاضلاع (أطراف القطع المستقيمة) رؤوس المضلع.

والأشكال التالية كلّها مضلعات.



الشكل (٤ - ١)

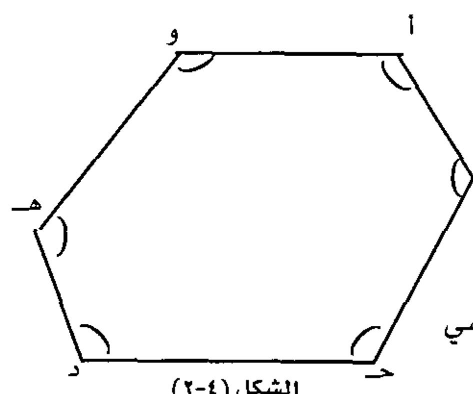
واذا كان عدد اضلاع المضلع:

١) ثلاثة سُمَّي مثلثاً

٢) أربعة سُمَّي شكلاً رباعيّاً

٣) خمسة سمَّي شكلاً خماسيّاً .... وهكذا.

ويُسمّى مجموع أطوال أضلاع المضلع محيط المضلّع. ولتسمية المضلع تُكتب رؤوس المضلع بترتيب تتابعي. فالشكل المجاور شكل سداسي يُسمّى:



الشكل (٤-٢)

المضلع أ ب جـ د هـ و أو المضلّع جـ د هـ و أ ب.... وهكذا

وأضلاعه هي:

أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د هـ ، هـ و ، و أ

وكل زاوية رأسها أحد رؤوس المضلع وضلعاها يحويان الضلعان المتقاطعان في ذلك الرأس وداخليتها تتقاطع مع داخليّة المضلع تُسمّى زاوية داخلية للمضلع.

فالزوايا: أ̂ ، ب̂ ، جـ̂ ، د̂ ، هـ̂ ، و̂ هي زوايا المضلع الداخلية.

وكل قطعة مستقيمة طرفاها رأسان غير متتابعين في مضلع تُسمّى قطراً للمضلع. فالقطعتان أ جـ ، أ د قطران للمضلع أ ب جـ د هـ في الشكل (٤-٣).

سؤال: اكتب كافّة الأقطار لهذا المضلع

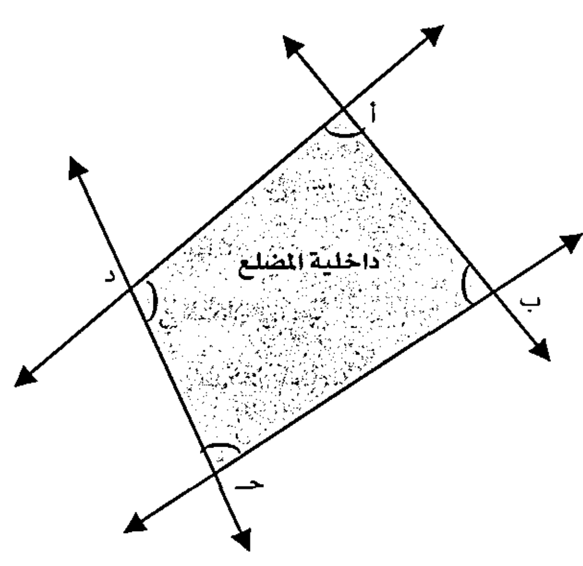
الشكل (٤-٣)

وبما أنّ المضلع منحنى مغلق بسيط فيمكن تصنيفه الى مضلع محدّب ومضلع مقعّر. وقد ورد سابقاً تعريف المنحنى المغلق البسيط المحدّب والمنحنى المغلق البسيط المقعر. وسنورد هنا تعريفاً خاصّاً للمضلع المحدّب والمضلع المقعر.

تعريف – المضلع المحدّب والمضلع المقعر:

١) يكون المضلع محدّباً إذا كان كل خط مستقيم يحوي ضلعاً من اضلاع المضلع لا يحوي أيّ نقطة داخليّة أو، اذا كان قياس كل زاوية داخليّة من زواياه اقل من ١٨٠° الشكل (٤-٤)

(٢) يكون المضلع مقعراً اذا وُجد مستقيم على الأقل يحوي ضلعاً من اضلاع المضلع ويحوي نقطاً داخليّة.

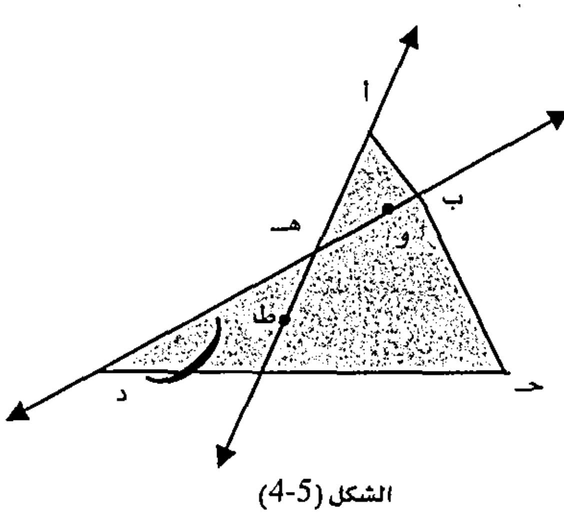


الشكل (٤-٤)

انظر الشكل (٤-٥): $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ يحوي الضلع $\overline{\text{أ هـ}}$ ويحوي نقطاً داخليّة مثل ط. وكذلك $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ يحوي الضلع $\overline{\text{هـ د}}$ ويحوي نقطاً داخليّة مثل و.

فالمضلع أ ب جـ د هـ مقعّر.

أو اذا وجدت زاوية على الأقل من زواياه الداخلية قياسها اكبر من ١٨٠ْ لاحظ ان ق (د هـ^ أ) > ١٨٠ْ



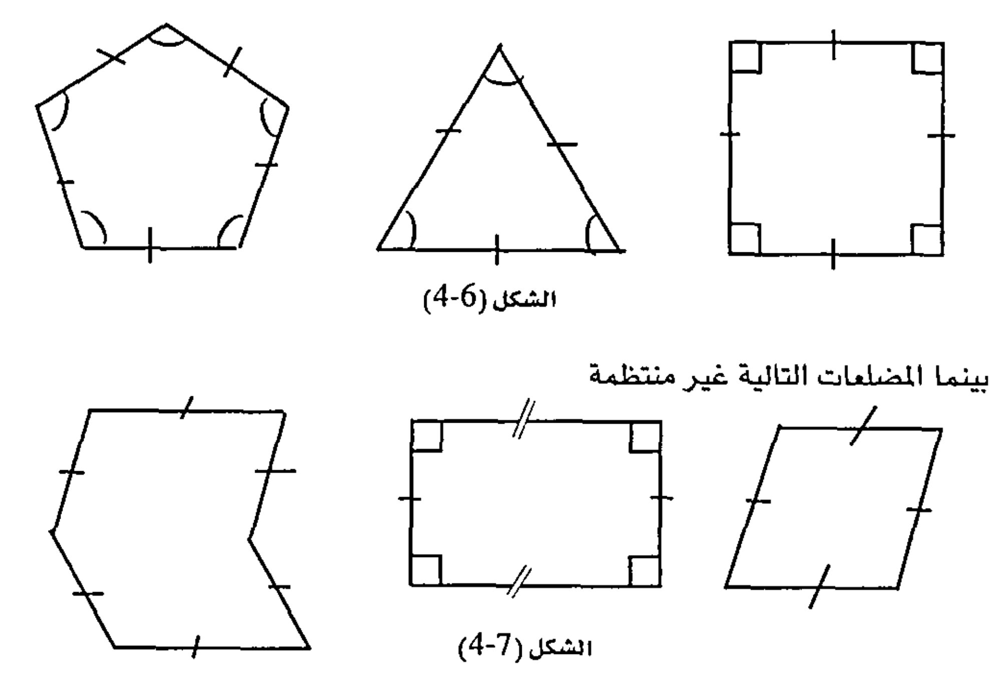
الشكل (4-5)

كما ويمكن تصنيف المضلعات الى مضلعات منتظمة ومضلعات غير منتظمة

تعريف - المضلع المنتظم :

يكون المضلع منتظماً اذا كانت جميع اضلاعه متطابقة وجميع زواياه متطابقة.

فالمضلعات التالية منتظمة.



الشكل (4-6)

بينما المضلعات التالية غير منتظمة

الشكل (4-7)

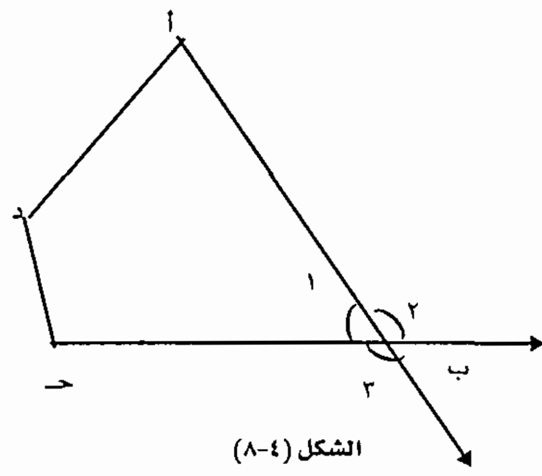
سؤال: أذكر الخواص الجوهرية للمضلع المنتظم

(٤-٢) الزاوية الخارجيّة لمضلع محدّب:

الزاوية الخارجيّة لمضلع محدّب هي زاوية تشكل مع إحدى زواياه الداخلية زوجاً من الزوايا المتجاورة على خط مستقيم.

ففي الشكل (٤-٨)؛ الزاوية ٢ خارجيّة للمضلع أ ب جـ د لأنها تشكل مع زاوية المضلع الداخلية ١ زاويتين متجاورتين على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، وكذلك $\hat{٣}$ زاوية خارجيّة.

لاحظ أنه، عند كل رأس من رؤوس المضلع المحدّب يوجد زاويتان خارجيتان.



الشكل (٤-٨)

ولمجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع محدّب خاصة هامّة نتناولها في المبرهنة التالية:

مبرهنة: مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة (واحدة عند كل رأس) لأي مضلع يساوي °٣٦٠.

والنشاط التالي يبيّن صحّة هذه النظريّة.

ورد سابقاً أنّ مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي °١٨٠ فهل مجموع قياسات الزوايا الداخليّه لأي نوع من المضلعات مقدار ثابت؟

للأجابة عن هذا السؤال ننظّم الجدول التالي

المضلع	الشكل	عدد الاضلاع	عدد المثلثات التي ينقسم اليها	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث		٣	١	°١٨٠
شكل رباعي		٤	٢	°١٨٠×٢
شكل خماسي		٥	٣	°١٨٠×٣
.	.	.	.	.
مضلع نونّي		ن	ن - ٢	(ن - ٢) × °١٨٠

من هذا الجدول يلاحظ أنّ:

مجموع قياسات زوايا المضلع المحدّب الداخليّه المكوّن من ن ضلعاً يساوي (ن – ٢) × ١٨٠°

ولأنّ للمضلع النوني ن من الرؤوس وعند كل رأس زوج من الزوايا المتجاورة على خط مستقيم (احداها داخلية والاخرى خارجيّة) فإنّ

مجموع قياسات أزواج الزوايا هذه = ن × ١٨٠°

إذن؛ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع النوني المحدّب (واحدة عند كل رأس)

= ن × ١٨٠°– (ن – ٢) × ١٨٠°

= ٣٦٠°

واذا كان المضلع النوني منتظماً فإنّ زواياه الداخلية متطابقة ومكملاتها (الزوايا الخارجية) متطابقة ايضاً، فيكون.

قياس كل زاوية خارجيّة = $\frac{٣٦٠°}{ن}$

وقياس كل زاوية داخليّة = ١٨٠°– $\frac{٣٦٠°}{ن}$

مثال: جد قياس كل زاوية داخليّة للشكل الثماني المنتظم

الحل: مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للشكل الثماني = (٨ – ٢) × ١٨٠°

= ١٠٨٠°

ولأن الشكل منتظم وعدد زواياه الداخلية ثمانية فإنّ

قياس كل زاوية داخليّة = $\frac{١٠٨٠°}{٨}$ = ١٣٥°

أو : قياس كل زاوية خارجيّة للشكل الثماني المنتظم = $\frac{٣٦٠°}{٨}$ = ٤٥°

اذن قياس كل زاوية داخليّة = ١٨٠° – ٤٥°

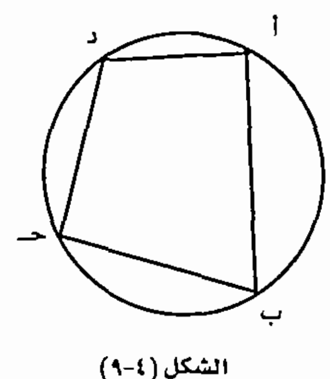
= ١٣٥°

تعريف – الشكل الرباعي الدائري:

يكون الشكل الرباعي دائرياً اذا وفقط اذا وقعت رؤوسه على دائرة.

ففي الشكل (٤-٩):

أ ب جـ د شكل رباعي دائري لأنّ رؤوسه أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة



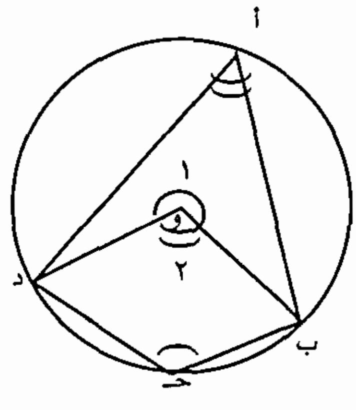
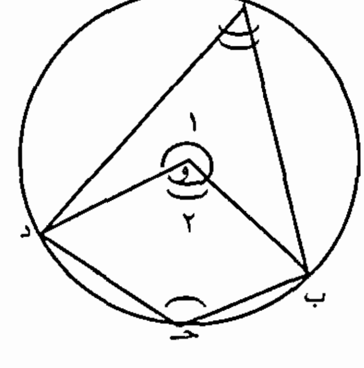
الشكل (٤-٩)

وللشكل الرباعي الدائري خاصّة هامّة نصوغها بالنتيجة التالية.

نتيجة: اذا كان الشكل الرباعي دائرياً فإنّ كلّ زاويتين متقابلتين متكاملتان

البرهان: في الشكل (٤-١٠)

أ ب جـ د شكل رباعي دائري مرسوم داخل دائرة مركزها و

الشكل (٤- ١٠)

ق ($\hat{أ}$) = $\frac{١}{٢}$ × ق ($\hat{٢}$). لماذا ؟

ق ($\hat{جـ}$) = $\frac{١}{٢}$ × ق ($\hat{١}$) لماذا ؟

∴ ق (أ) + ق (جـ) = $\frac{١}{٢}$ × (ق ($\hat{١}$) + ق ($\hat{٢}$))

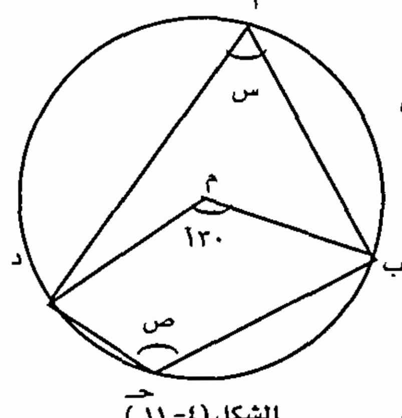
= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠°. لماذا؟

= ١٨٠°. فالزاويتان $\hat{أ}$ ، $\hat{جـ}$ متكاملتان.

وبالمثل نثبت أن الزاويتين $\hat{ب}$ ، $\hat{د}$ متكاملتان.

وعكس هذه النتيجة صحيح أيضاً. أي أنّه

اذا كانت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي متكاملتين فإن الشكل رباعيّ دائري.



الشكل (٤- ١١)

مثال (١): في الشكل المجاور،

أوجد كلاً من س ، ص

الحل: بما أنّ الزاويتين:

المركزية ب $\hat{م}$ د ، والمحيطيّة ب $\hat{أ}$ د مرسومتان على

القوس ب⌒د ، فإنّ

ق (ب أ̂ د) = $\frac{١}{٢}$ × ق (ب م̂ د)

∴ س = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠°

= ٦٥°

وبما أن الشكل الرباعي أ ب جـ د دائريّ فإنّ الزاويتين المتقابلتين ب أ̂ د ، ب جـ̂ د متكاملتان

أي أنّ

ق (ب أ̂ د) + ق (ب جـ̂ د) = ١٨٠°

٦٥ + ص = ١٨٠°

∴ ص = ١١٥°

مثال (١): لتكن مـ دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٥ سم، ولتكن أ نقطة خارج الدائرة بُعدها عن المركز ١٣ سم. رسم من أ مماسان للدائرة قطعاها بالنقطتين ب ، جـ

(١) أثبت أنّ الشكل الرباعي أ ب م جـ دائري

(٢) إذا علم أنّ ق (ب جـ̂ م) = ١٥° فأوجد ق (ب أ̂ جـ)

الحل:

(١) بما أنّ المماس عموديّ على نصف قطر التماس فإنّ الزاويتين أ ب̂ م ، أ جـ̂ م قائمتان؛ أي أنّهما متكاملتان.

وبما أنّهما زاويتان متقابلتان في الشكل الرباعي أ ب م جـ فإنّه يكون دائرياً.

(٢) في المثلث م ب جـ ؛ $\overline{مب} \cong \overline{مجـ}$ نصفا قطرين في الدائرة مـ

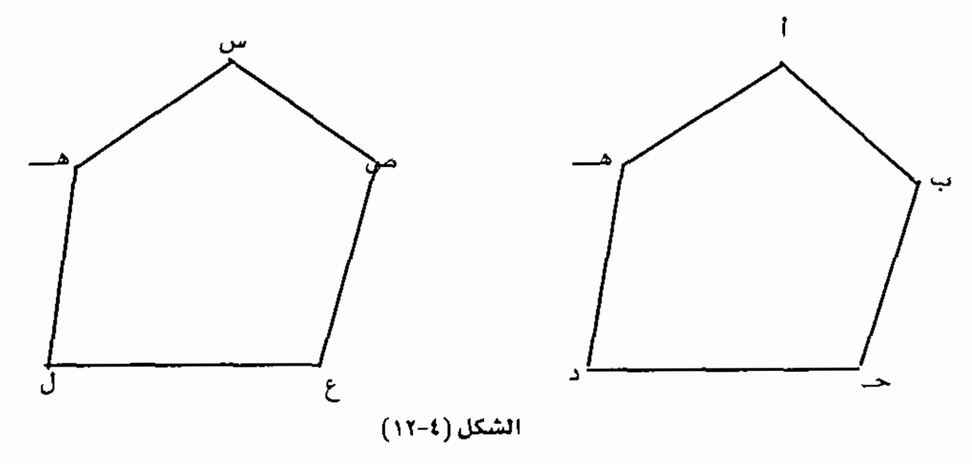
∴ $\hat{ب} \cong \hat{جـ}$

ولأنّ مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠° فإنّ ق (ب$\hat{م}$ جـ) = ١٥٠°. لكن ب $\hat{م}$ جـ، ب $\hat{أ}$ جـ زاويتان متكاملتان لأنهما زاويتان متقابلتان في الشكل الرباعي الدائري أ ب م جـ

∴ ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٣٠°

(٤ - ٣) تطابق المضلعات وتشابهها:

تطابق المضلعات: اذا قُص المضلع أ ب جـ د هـ ووضع فوق المضلع س ص ع ل هـ



الشكل (٤-١٢)

وانطبقت أضلاع المضلع أ ب جـ د هـ وزواياه على الأضلاع والزوايا المناظرة في المضلع س ص ع ل هـ نقول إنّ المضلعين متطابقان. أي أنّه.

يتطابق مضلعان إذا تطابقت أضلاع أحدهما وزواياه مع الأضلاع والزوايا المناظرة لها في المضلع الآخر.

ولهذا المعنى العام لتطابق المضلعات شروط كافية في الحالات الخاصّة من المضلّع سنوردها مع كل مفهوم خاص من المفهوم العام للمضلعّ.

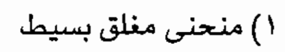
تشابه المضلعات:

يتشابه مضلعان متساويان في عدد الأضلاع اذا تطابقت الزوايا المتناظرة وكانت الأضلاع المتناظرة متناسبة، أي أن النسبة بين كل ضلع في احدهما ونظيره في المضلع الآخر نسبة ثابتة.

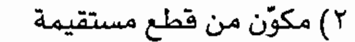
(٤ - ٤) المثلث:

منحنى مغلق بسيط مكوّن من قطع مستقيمة عددها ثلاث أو هو مضلع عدد أضلاعه ثلاثة.

لاحظ أن التعريف الأول ذُكرت فيه الخواص الجوهريّة المميزة مفصلة وهي:-

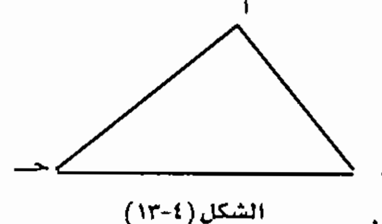


١) منحنى مغلق بسيط



٢) مكوّن من قطع مستقيمة

٣) عدد القطع المستقيمة ثلاث



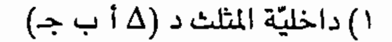
الشكل (٤-١٣)

بينما في التعريف الثاني اختصرت الخاصتان الأولى والثانية بكلمة "مضلع" وفي الشكل (٤-١٣) مثلث رؤوسه هي النقط أ ، ب ، جـ ويُرمز له بالرمز Δ أ ب جـ، واضلاعه هي القطع المستقيمة أ ب ، ب جـ ، جـ أ وزواياه هي الزوايا ب أ̂ جـ ، أ ب̂ جـ ، ب جـ̂ أ

أو أ̂ ، ب̂ ، جـ̂

لاحظ أن Δ أ ب جـ = أ ب ∪ ب جـ ∪ جـ أ

وكل مثلث يقسم المستوى المرسوم فيه إلى ثلاثة أجزاء منفصلة:



١) داخليّة المثلث د (Δ أ ب جـ)

٢) خارجيّة المثلث خ (Δ أ ب جـ)

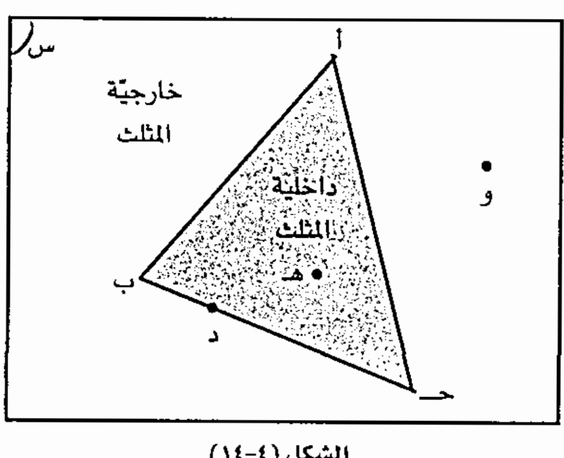
٣) المثلث نفسه Δ أ ب جـ .

لاحظ أنّ:

هـ ∋ د (Δ أ ب جـ)

و∋ خ (Δ أ ب جـ)

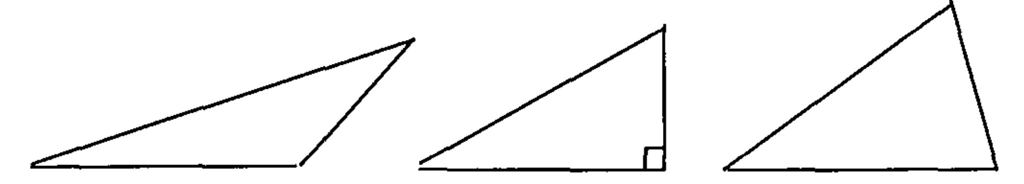
أ ، ب ، جـ، د ∋ Δ أ ب جـ



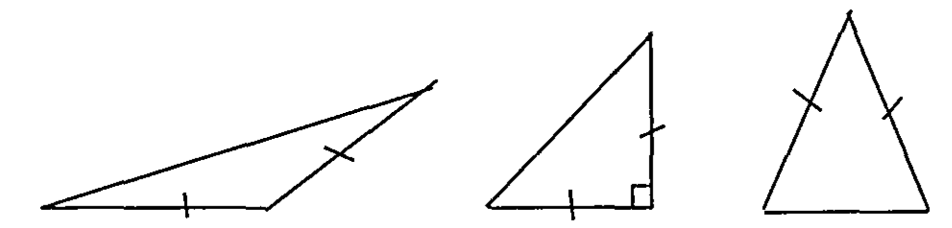
الشكل (٤-١٤)

وتصنّف المثلثات تبعاً لأطوال أضلاعها إلى ثلاثة أصناف (أنواع):

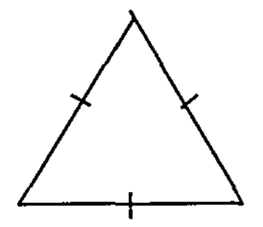
(١) مثلث اضلاعه غير متطابقة: وهو مثلث كل ضلعين فيه غير متطابقين.



(٢) مثلث متطابق الضلعين: هو مثلث فيه ضلعان على الأقل متطابقان.

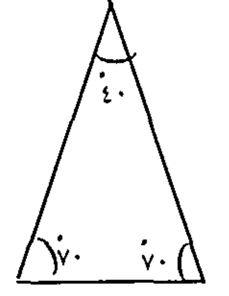


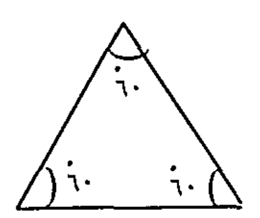
(٣) مثلث متطابق الأضلاع: وهو مثلث جميع اضلاعه متطابقة.

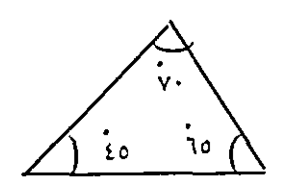


كما وتصنّف المثلثات تبعاً لقياسات زواياها الداخليّه إلى ثلاثة أصناف (أنواع).

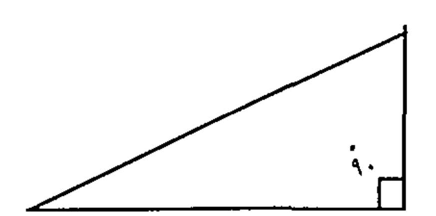
(١) مثلث حادّ الزوايا. هو مثلث جميع زواياه حادّة.

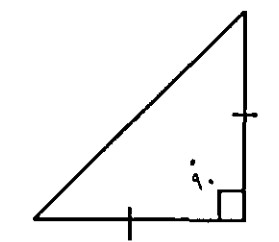




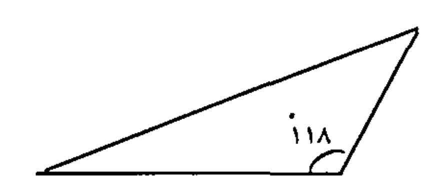


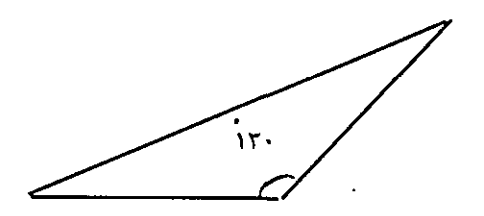
(٢) مثلث قائم الزاوية: هو مثلث أحدى زوايا قائمة.





(٣) مثلث منفرج الزاوية: وهو مثلث احدى زواياه منفرجة.





تطابق المثلثات:

من التعريف العام لتطابق المضلعات يتضح أنّه؛

يتطابق مثلثان اذا تطابقت اضلاع أحد المثلثين وزواياه مع نظيراتها في المثلث الآخر. إلاّ أنّه يكفي أحياناً تطابق ثلاثة عناصر من العناصر الستّة لمثلث (ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا) مع نظيراتها في مثلث آخر لتتطابق العناصر الثلاثة الأخرى للمثلثين.

والنظريّة التالية تبيِّن الشروط الكافية لتطابق مثلثين.

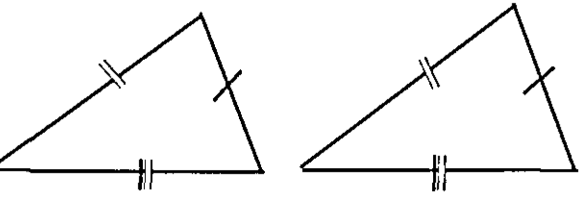
نظريّة: يتطابق مثلثان في الحالات التالية:

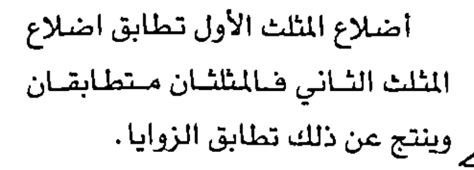
(١) اذا تطابقت أضلاع أحدهما مع أضلاع الآخر (ض ض ض)

(٢) اذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحدهما مع نظيراتها في المثلث الآخر (ض ز ض).

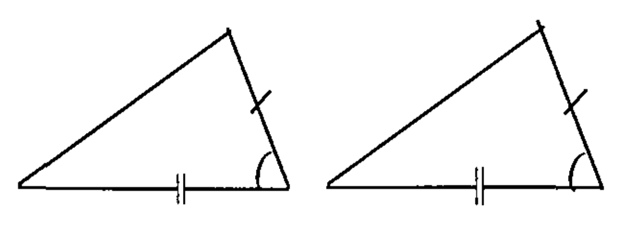
(٣) اذا تطابقت زاويتان وضلع في أحدهما مع نظيراتها في المثلث الآخر (ز ز ض).

انظر الشكل (٤-١٥) التالي:

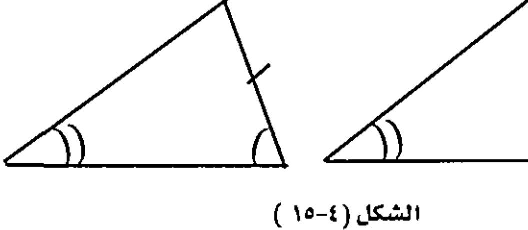




أضلاع المثلث الأول تطابق اضلاع المثلث الثاني فالمثلثان متطابقان وينتج عن ذلك تطابق الزوايا.



ضلعان وزاوية محصورة بينهما في المثلث الأول تطابق نظيراتها في المثلث الثاني، فالمثلثان متطابقان وينتج عن ذلك تطابق بقيّة العناصر.



زاويتان وضلع في المثلث الأول تطابق نظيراتها في المثلث الثاني، فالمثلثان متطابقان وينتج عن ذلك تطابق العناصر الباقية.

الشكل (٤-١٥)

والشروط الكافية لتطابق مثلثين تكفي أيضاً لرسم مثلث.

مثال (١) : ارسم المثلث أ ب جـ إذا كان أ ب = ٥سم، ب جـ = ٧ سم

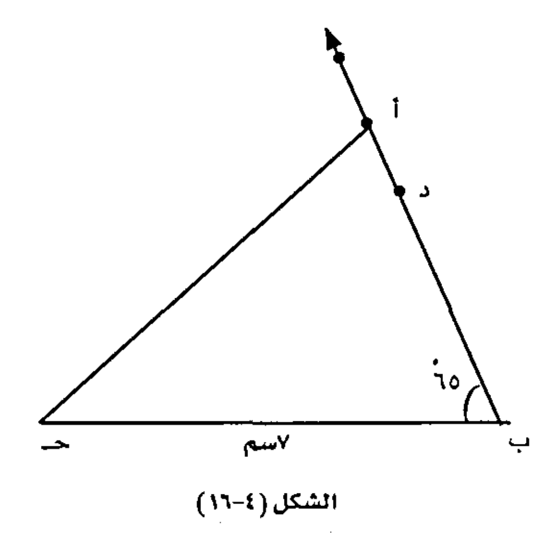
ق ($\hat{ب}$) = ٦٥°

الحل: (١) نستعمل المسطرة لرسم $\overline{ب جـ}$ بطول ٧ سم

(٢) نستعمل المنقلة لتحديد نقطة د بحيث ق (د $\hat{ب}$ جـ) = ٦٥° ونرسم $\overleftarrow{ب د}$

(٣) نستعمل المسطرة لتعيين نقطة أ على $\overleftarrow{ب د}$ بحيث ب أ = ٥ سم

(٤) نرسم $\overline{أ جـ}$ فيكون Δ أ ب جـ هو المثلث المطلوب رسمه.



الشكل (٤-١٦)

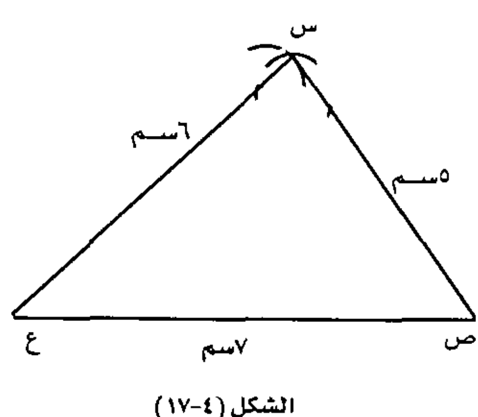
مثال (٢) : ارسم المثلث س ص ع اذا كان س ص = ٥ سم؛ ص ع = ٧سم، ع س = ٦ سم.

الحل: (١) نستعمل المسطرة لرسم ص ع وطولها ٧ سم.

(٢) نستعمل الفرجار وبفتحة تساوي ٥ سم نرسم قوساً من دائرة مركزها ص أعلى ص ع.

(٣) باستعمال الفرجار ايضاً وبفتحة تساوي ٦ سم نرسم قوساً من دائرة مركزها ع ويقطع القوس الأول في نقطة نُسميّها س.

(٤) نرسم س ص ، س ع فيكون Δ س ص ع هو المثلث المطلوب رسمه.



الشكل (٤-١٧)

خواص ثانوية ثابتة للمثلث:

للمثلث خواص ثانوية تتحقق لجميع المثلثات يمكن اثبات صحّتها اعتماداً على خواصّه الجوهريّة والمعارف الرياضيّة السابقة، منها:

(١) مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

(ورد اثباتها سابقاً)

(٢) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث توازي الضلع الثالث وطولها نصف طوله.

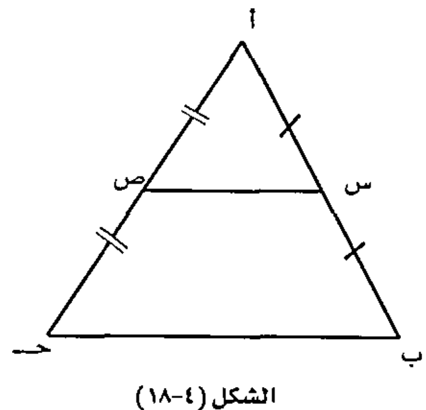
ففي الشكل المجاور (٤-١٨):

أ ب جـ مثلث؛ إذا كانت س منتصف أ ب،

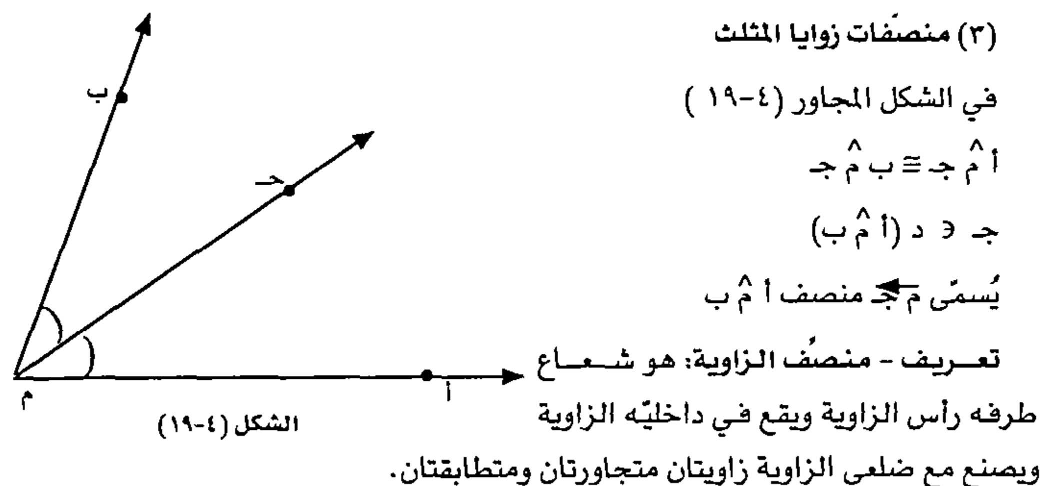
ص منتصف أ جـ، فإنّ:

س ص // ب جـ

س ص = $\frac{١}{٢}$ ب جـ



الشكل (٤-١٨)



الشكل (٤-١٩)

(٣) منصَفات زوايا المثلث

في الشكل المجاور (٤-١٩)

أ م̂ جـ ≅ ب م̂ جـ

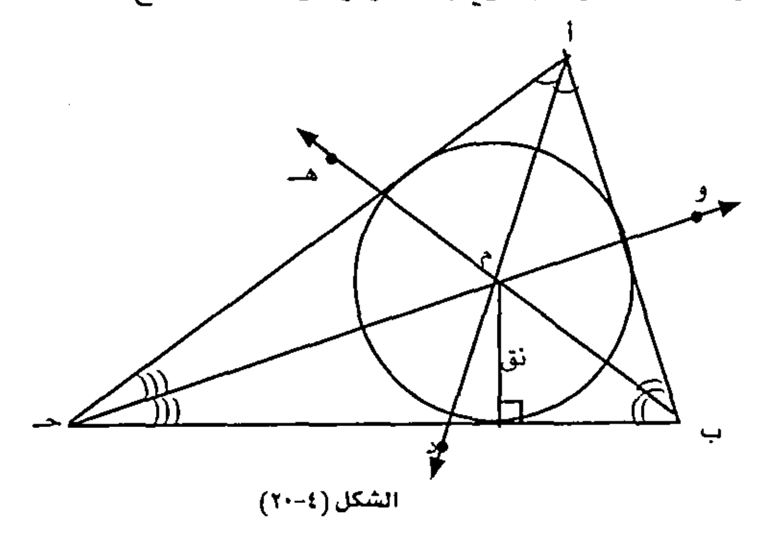
جـ ∈ د (أ م̂ ب)

يُسمّى م جـ⃖ منصف أ م̂ ب

تعــريف - منـصفُ الـزاوية: هـو شــعــاع طرفه رأس الزاوية ويقع في داخليّه الزاوية ويصنع مع ضلعي الزاوية زاويتان متجاورتان ومتطابقتان.

والعبارة التالية تصف علاقة بين منصّفات زوايا المثلث.

منصفات زوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة هي مركز الدائرة التي تمّس أضلاع المثلث من الداخل وطول نصف قطرها يساوي بُعد المركز عن أحد الأضلاع.



الشكل (٤-٢٠)

ففي الشكل (٤-٢٠) أعلاه،

اذا نُصّفت أ̂ بالمنصّف أ د⃖

ونصفت ب̂ بالمنصف ب هـ⃖

ونصفت جـ̂ بالمنصف جـ و⃖

فإنّ هذه المنصفات الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة (م). وإذا أُنزل عمود من نقطة م على أحد أضلاع المثلث ورسمت دائرة مركزها(م) وطول نصف قطرها يساوي طول العمود النازل من م على أحد اضلاع المثلث فإن هذه الدائرة تمس أضلاع المثلث من الداخل.

نشاط: ارسم مثلثاً قائم الزاوية ونصف زواياه؛ ثم ارسم الدائرة التي تمس اضلاعه من الداخل.

- كرّر العمل السابق على مثلث منفرج الزاوية

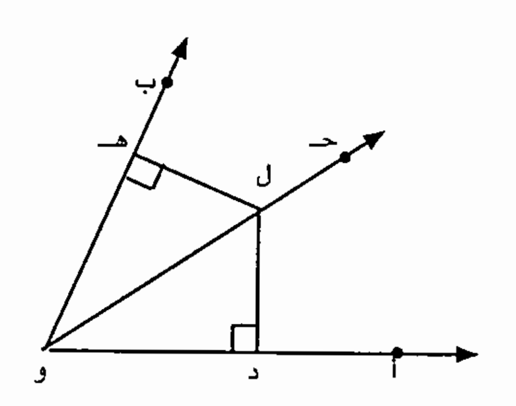
مثال (٣): اثبت أنّ:

كل نقطة على منصّف الزاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعي الزاوية

المعطيات؛ و جـ منصّف للزاوية أ و̂ ب

ل ∋ و جـ

ل د ⊥ و أ ، ل هـ ⊥ و ب



المطلوب: اثبات أن

بُعد ل عن و أ = بُعد ل عن و ب

أي ل د = ل هـ

البرهان: المثلثان ل د و ، ل هـ و فيهما:

ل د̂ و ≅ ل هـ̂ و قائمتان

د و̂ ل ≅ هـ و̂ ل

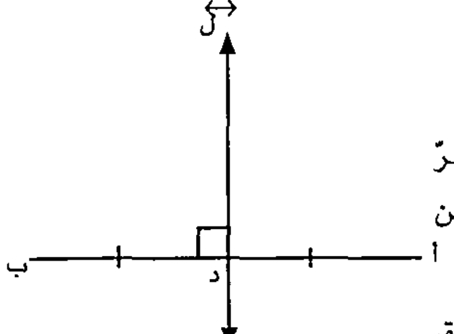
ل و ≅ ل و.

∴ يتطابق المثلثان بحالة (ز ز ض) وينتج أنّ ل د ≅ ل هـ

أي أن ل د = ل هـ

وهو المطلوب.

(٤) الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث



الشكل (٤-٢١)

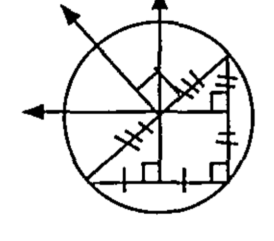
في الشكل (٤-٢١)،

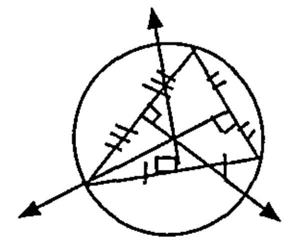
د منتصف $\overline{أب}$، $\overleftrightarrow{ل}$ عمودي على $\overline{أب}$ ويمرّ بالنقطة د. يوصف $\overleftrightarrow{ل}$ بأنّه عمود على $\overline{أب}$ من منتصفها.

والأعمدة على أضلاع المثلث من منتصفاتها تحقق العلاقة التالية:

الأعمدة على أضلاع المثلث من منتصفاتها تلتقي في نقطة واحدة هي مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث وطول نصف قطرها يساوي بعد المركز عن أحد الرؤوس.

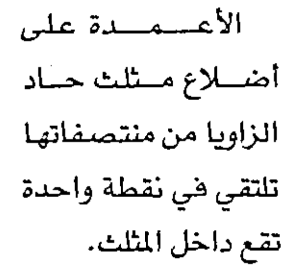
والشكل (٤-٢٢) التالي يوضّح هذه الخاصّة لأنواع مختلفة من المثلثات.





الأعمدة على أضلاع مثلث منفرج الزاوية من منتصفاتها تلتقي في نقطة واحدة تقع خارج المثلث.

الأعمدة على أضلاع مثلث قائم الزاوية من منتصفاتها تلتقي في نقطة واحدة هي منتصف الوتر.



الأعمدة على أضلاع مثلث حاد الزاويا من منتصفاتها تلتقي في نقطة واحدة تقع داخل المثلث.

الشكل (٤-٢٢)

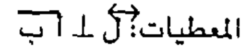
وفي جميع الحالات يكون طول نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس مثلث يساوي بعد نقطة التقاء الأعمدة على أضلاع المثلث من منتصفاتها عن أيٍّ من رؤوس المثلث.

نتيجة: أي ثلاث نقط غير مستقيمة تقع على دائرة وحيدة.

نشاط: ارسم ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، ثم ارسم دائرة تمر بهذه النقاط الثلاث.

مثال (٤) : اثبت أنّ،

كل نقطة على المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها تكون على بُعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.



المعطيات: $\overleftrightarrow{ل} \perp \overline{أ ب}$

$\overleftrightarrow{ل} \cap \overline{أ ب} = \{جـ\}$

$\overline{أ جـ} \equiv \overline{جـ ب}$؛ $د \in \overleftrightarrow{ل}$

المطلوب : اثبات أن

د أ = د ب

العمل: نرسم $\overline{د أ}$ ، $\overline{د ب}$

البرهان: المثلثان د أ جـ ، د ب جـ فيهما:

$\overline{أ جـ} \equiv \overline{جـ ب}$ من المعطيات

$\overline{د جـ} \equiv \overline{د جـ}$

$أ \hat{جـ} د \equiv ب \hat{جـ} د$ زاويتان قائمتان.

∴ يتطابق المثلثان بحالة (ض ز ض) وينتج عن ذلك:

$\overline{د أ} = \overline{د ب}$ أي أن د أ = د ب.

وهو المطلوب.

(٥) القطع المتوسطة:

في الشكل (٤-٢٣) المجاور؛ $\overline{أ د}$ قطعة مستقيمة واصلة بين الرأس أ ومنتصف الضلع $\overline{ب جـ}$ (المقابل للرأس أ) في المثلث أ ب جـ.

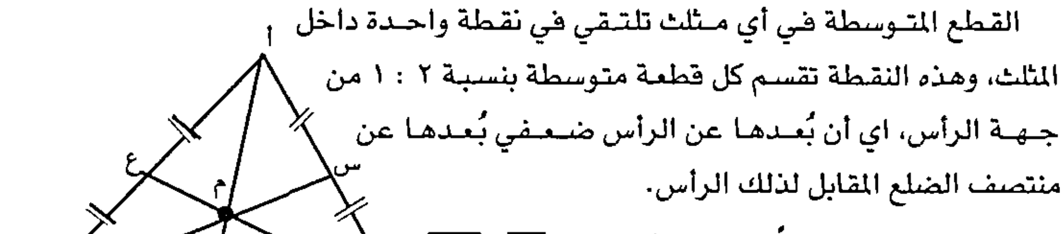
تُسمّى هذه القطعة المستقيمة قطعة متوسطة في المثلث أ ب جـ

الشكل (٤-٢٣)

فالقطعة المتوسطة في المثلث هي قطعة مستقيمة واصلة بين أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل لذلك الرأس. وعلى ذلك فإنّ لكل مثلث ثلاث قطع متوسطة.

والعبارة التالية تصف علاقة بين القطع المتوسطة الثلاث:

القطع المتوسطة في أي مثلث تلتقي في نقطة واحدة داخل المثلث، وهذه النقطة تقسم كل قطعة متوسطة بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس، اي أن بُعدها عن الرأس ضعفي بُعدها عن منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.



الشكل (٤-٢٤)

فإذا كان أ ب جـ مثلثاً، ونصفت أضلاعه أ ب، ب جـ، جـ أ بالنقط س ، ص ، ع على الترتيب فإنّ القطع المتوسطة أ ص ، ب ع ، جـ س تلتقي في نقطة واحدة (م) حيث

$$\frac{\text{أ م}}{\text{م ص}} = \frac{\text{ب م}}{\text{م ع}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{م س}} = \frac{٢}{١}$$

أي أنّ:

أ م = ٢ × م ص ؛ ب م = ٢ × م ع ، جـ م = ٢ × م س

(٦) ارتفاعات المثلث:

في الشكل (٤-٢٥) المجاور،

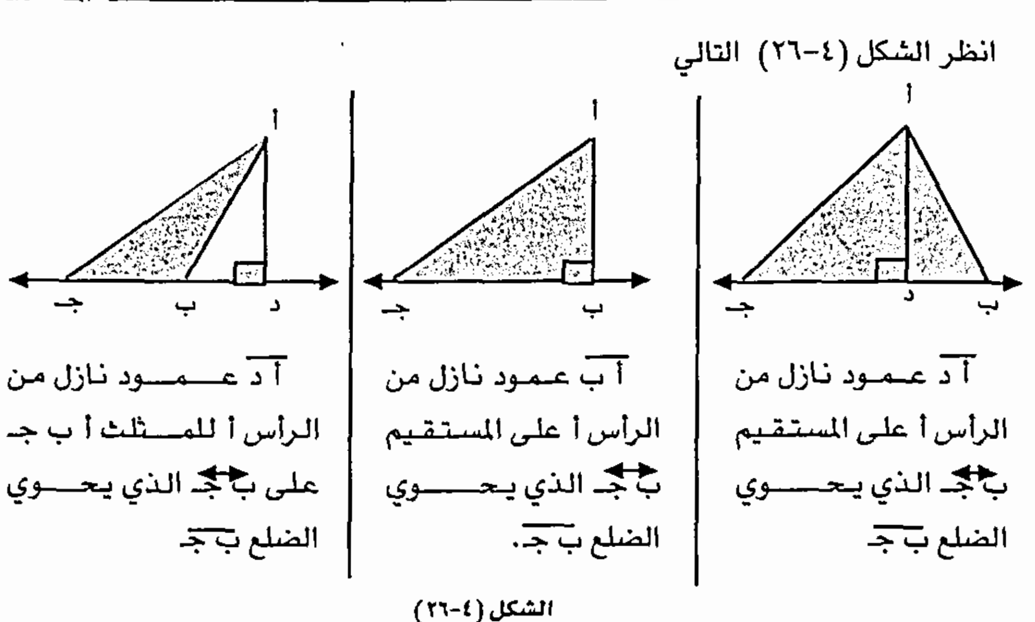
أ د قطعة مستقيمة عموديّة على الضلع ب جـ.

توصف أ د بأنها العمود النازل من الرأس أ على المستقيم الذي يحوي الضلع ب جـ المقابل له.

الشكل (٤-٢٥)

فالعمود النازل من رأس مثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل هو قطعة مستقيمة أحد طرفيها رأس من رؤوس المثلث وطرفها الآخر يقع على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس وتكون عموديّة عليه.

انظر الشكل (٤-٢٦) التالي



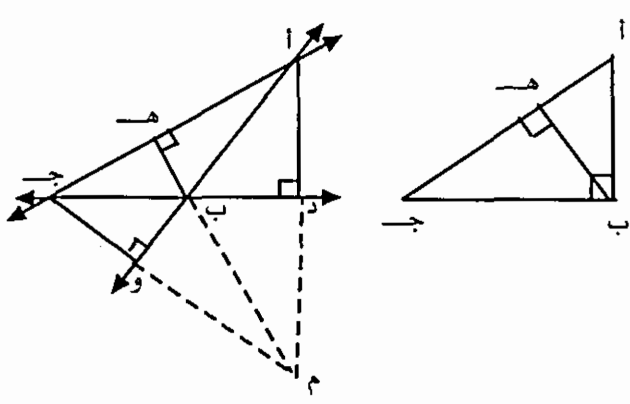
الشكل (٤-٢٦)

يُسمّى طول العمود النازل من أحد رؤوس المثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس ارتفاع المثلث، والضلع المقابل لذلك الرأس يُسمّى قاعدة المثلث.

وبما أنّ للمثلث ثلاثة رؤوس فإنّه يوجد ثلاثة أعمدة نازلة من الرؤوس الثلاثة على المستقيمات التي تحوي الأضلاع المقابلة لتلك الرؤوس. والعبارة التالية تصف علاقة بين هذه الأعمدة الثلاثة.

الأعمدة النازلة من رؤوس أيّ مثلث (أو المستقيمات التي تحويها) على المستقيمات التي تحوي الأضلاع المقابلة تلتقي في نقطة واحدة.

والشكل (٤-٢٧) التالي يبيّن هذه العلاقة لأنواع مختلفة من المثلثات



أ د هو العمود النازل على ب جـ
ب هـ هو العمود النازل على أ جـ
جـ و هو العمود النازل على أ ب

والأعمدة الثلاثة في المثلث الحاد الزوايا تلتقي في نقطة واحدة داخل المثلث.

أ ب هو العمود النازل على ب جـ
جـ ب هو العمود النازل على أ ب
ب هـ هو العمود النازل على أ جـ

والأعمدة الثلاثة في المثلث القائم الزاوية تلتقي في نقطة واحدة هي رأس الزاوية القائمة.

أ د هو العمود النازل على ب جـ
ب هـ هو العمود النازل على أ جـ
جـ و هو العمود النازل على أ ب

والمستقيمات التي تحوي الأعمدة الثلاثة في المثلث المنفرج الزاوية تلتقي في نقطة واحدة خارج المثلث.

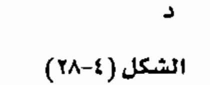
الشكل (٤-٢٧)

(٧) مساحة المنطقة المثلثيّة

في الشكل (٤-٢٨) المجاور، اذا اعتبرنا ب جـ قاعدة للمثلث فإنّ أ د هو ارتفاع المثلث المرتبط بها.

وكذلك، ب هـ هو ارتفاع المثلث المرتبط بالقاعدة أ جـ، جـ و هو الارتفاع المرتبط بالقاعدة أ ب.

ومساحة داخليّة المثلث (أو المنطقة المثلثيّة) تُحسب من القاعدة التالية.



الشكل (٤-٢٨)

مساحة المنطقة المثلثيّة تساوي نصف حاصل ضرب طول قاعدتها في الارتفاع المرتبط بها.

واذا رمزنا لطول القاعدة بالحرف ق وللارتفاع بالحرف ع فإنّ.

مساحة داخليّة المثلث = $\frac{1}{2}$ ق ع

ففي الشكل (٤-٢٨) أعلاه:

مساحة داخليّة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ د أو

= $\frac{1}{2}$ جـ أ × ب هـ أو

= $\frac{1}{2}$ أ ب × جـ و

مثال (١): في الشكل المجاور؛

أ ب جـ مثلث فيه

ب جـ = ٨ سم؛ أ ب = ٧ سم

إذا كان $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث أ د = ٥ سم

وكان $\overline{\text{جـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$. فاوجد

(١) مساحة المنطقة المثلثية أ ب جـ

(٢) طول $\overline{\text{جـ هـ}}$.

الحل : (١) مساحة المنطقة المثلثية أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أ د

= $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٥ = ٢٠ سم^{2}

(٢) إذا اعتبرنا $\overline{\text{أ ب}}$ قاعدة للمثلث فإن :

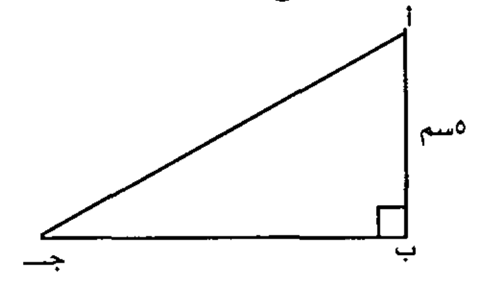
مساحة المنطقة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × جـ هـ

∴ ٢٠ = $\frac{1}{2}$ × ٧ × جـ هـ

ومنها جـ هـ = $\frac{٤٠}{٧}$ = ٥ $\frac{٥}{٧}$ سم

مثال (٢) : إذا كان أ ب جـ مثلثاً قائم الزاوية في ب ؛ وكان أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم، فأوجد مساحة المنطقة المثلثية أ ب جـ.

الحل: إذا اعتبرنا $\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدة للمثلث فإن طول $\overline{\text{أ ب}}$ هو الارتفاع المرتبط بالقاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$

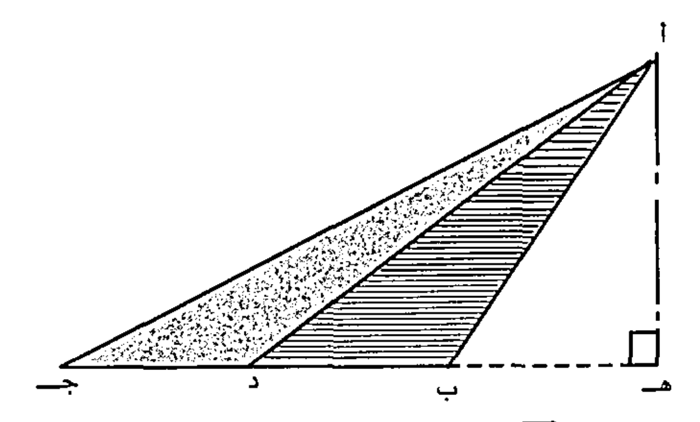


∴ مساحة داخليه Δ أ ب جـ =

$\frac{1}{2}$ × ب جـ × أ ب

$\frac{1}{2}$ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم²

مثال (٣): أثبت أنّ القطعة المتوسطة في أي مثلث تقسم داخليته إلى منطقتين مثلثتين متساويتين في المساحة.



المعطيات: أ ب جـ مثلث. $\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسطة

المطلوب: اثبات أنّ : مساحة المنطقة المثلثيّة أ ب د = مساحة المنطقة أ د جـ

العمل : نُنَزل العمود أ هـ على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

البرهان: مساحة المنطقة المثلثيّة أ ب د = $\frac{1}{2}$ ب د × أ هـ

ومساحة المنطقة المثلثيّة أ د جـ = $\frac{1}{2}$ د جـ × أ هـ

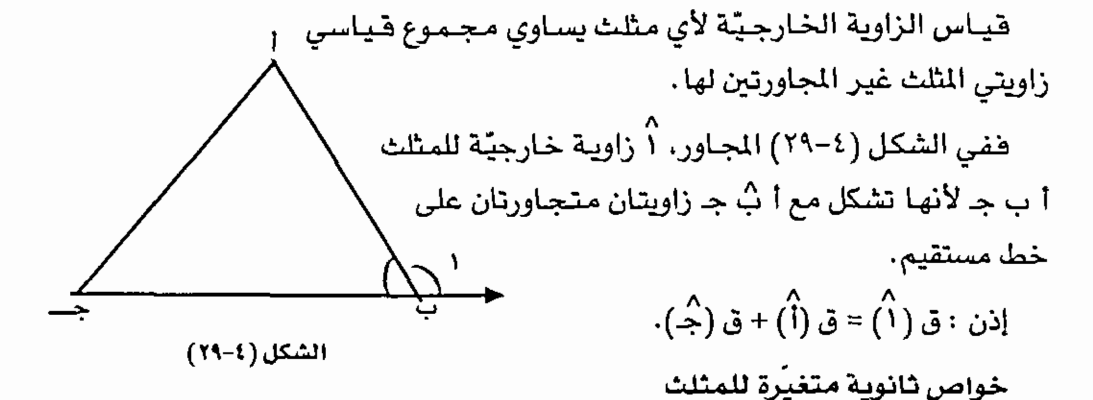
لكن ب د = د جـ لأن $\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسطة في المثلث أ ب جـ

∴ مساحة المنطقة أ ب د = مساحة المنطقة أ د جـ.

(٨) قياس الزاوية الخارجيّة للمثلث.

يرتبط قياس الزاوية الخارجيّة للمثلث بقياسات زواياه الداخليّة بعلاقة تُحدّدها العبارة التالية:

قياس الزاوية الخارجيّة لأي مثلث يساوي مجموع قياسي زاويتي المثلث غير المجاورتين لها.



الشكل (٤-٢٩)

ففي الشكل (٤-٢٩) المجاور، ١̂ زاوية خارجيّة للمثلث أ ب جـ لأنها تشكل مع أ بَ̂ جـ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم.

إذن : ق (١̂) = ق (أ̂) + ق (جـ̂).

خواص ثانوية متغيِّرة للمثلث

مع أنّ الخواص الجوهرية للمثلث ثابتة، إلاّ أنّه قد يُضاف إليها شروط أخرى يترتّب عليها نتائج معينة. وهذه النتائج تكون مقصورة على المثلثات التي يتوفر فيها الشرط الاضافي . تُسمّى هذه النتائج خواص ثانوية متغيرة للمثلث، ومنها

(١) اذا كان المثلث متطابق الضلعين فإنّ زاويتي القاعدة متطابقتان.

ففي الشكل (٤-٣٠) المجاور؛ اذا كان $\overline{\text{أ ب}} \cong \overline{\text{أ جـ}}$ فإنّ ب̂ ≅ جـ̂
لاحظ أن المعطيات هي مثلث بخواصّه الجوهّرية بالاضافة إلى كونه متطابق الضلعين. والنتيجة المترتبة على ذلك هي تطابق زاويتي القاعدة. فهذه النتيجة ليست صحيحة لجميع المثلثات، بل لبعض المثلثات وهي التي تتصف بتطابق ضلعين. ولهذا سُمّيت خاصّة متغيرة على العكس من الخواص الثانوية السابقة التي تكون صحيحة لجميع المثلثات.

أ
ب
جـ
الشكل (٤-٣٠)

والعكس صحيح أيضاً، أي أنّه اذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

نتيجته:

إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإنّ زواياه الثلاث تكون متطابقة وقياس كل منها يساوي ٦٠°،
وإذا كانت زوايا مثلث متطابقة فإنّ أضلاعه متطابقة

مثال: في المثلث أ ب جـ المجاور:

إذا كان أب ≅ أجـ، وكان ق (أ̂) = ٧٠°

فأوجد قياس كلّ من ب̂ ، جـ̂

الحل: بما أنّ ق (أ̂) + ق (ب̂) + ق (جـ̂) = ١٨٠°

ق (أ̂) = ٧٠°

فإنّ ق (ب̂) + ق (جـ̂) = ١١٠°

ولأنّ أب ≅ أجـ فإنّ ب̂ ≅ جـ̂

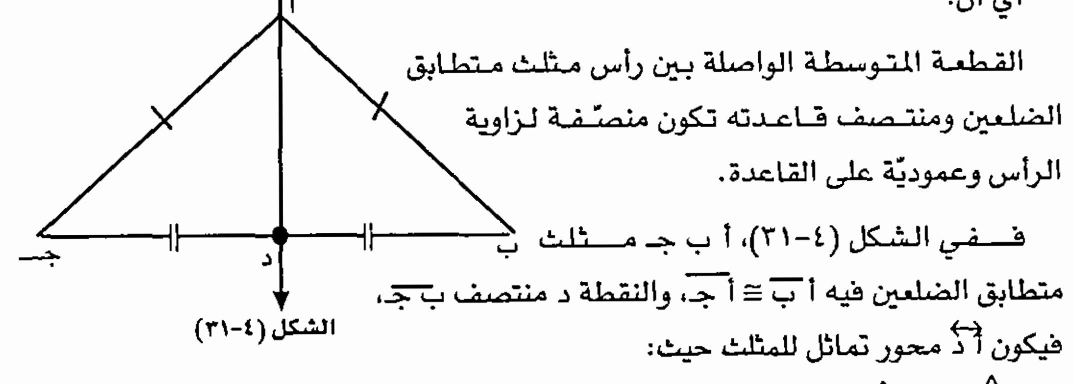
اذن ق (ب̂) = ق (جـ̂) = ٥٥°

الشكل ( )

(٢) إذا كان المثلث متطابق الضلعين فإنّ له محور تماثل هو الخط المستقيم المار برأس المثلث ومنتصف قاعدته. وهذا المحور ينصّف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة.

أي أنّ:

القطعة المتوسطة الواصلة بين رأس مثلث متطابق الضلعين ومنتصف قاعدته تكون منصّفة لزاوية الرأس وعموديّة على القاعدة.



الشكل (٤-٣١)

ففي الشكل (٤-٣١)، أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه أب ≅ أجـ، والنقطة د منتصف ب جـ،
فيكون أد محور تماثل للمثلث حيث:

ب أ̂ د ≅ جـ أ̂ د ، أد ⊥ ب جـ

والعكس صحيح، أي أن:

العمود النازل من رأس المثلث المتطابق الضلعين على قاعدته ينصّفها وينصف زاوية الرأس. وكذلك منصف زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين يكون عمودياً على قاعدته وينصّفها.

لاحظ أنّ، القطعة المستقيمة $\overline{أ د}$ هي قطعة متوسطة في المثلث أ ب جـ وهي منصف للزاوية أ، وهي عمود نازل من الرأس أ على القاعدة $\overline{ب جـ}$ وهي العمود المقام من منتصف $\overline{ب جـ}$ عليه.

نتيجة: اذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإنّ منصفات زواياه تكون عموديّة على اضلاعه من منتصفاتها وتحوي قطعة المتوسطة وكلها تلتقي في نقطة واحدة، هي مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث وهي مركز الدائرة التي تمس اضلاع المثلث من الداخل.

مثال: اذا كان $\overline{أ ب}$ وتراً في دائرة مركزها م

فأثبت أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين المركز م ومنتصف $\overline{أ ب}$ تكون عموديّة على $\overline{أ ب}$ ومنصفة للزاوية أ $\hat{م}$ ب

البرهان: بما أنّ $\overline{م أ} \cong \overline{م ب}$، نصفا قطرين في الدائرة فإن Δ م أ ب متطابق الضلعين.

ولأنّ جـ منتصف القاعدة $\overline{أ ب}$ فإنّ $\overleftrightarrow{م جـ}$ محور تماثل للمثلث م أ ب

اذن $\overline{م جـ} \perp \overline{أ ب}$؛ أ $\hat{م}$ جـ $\cong$ ب $\hat{م}$ جـ

(٣) نظريّة فيثاغورث

في الشكل (٤-٣٢) المجاور، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب يُسمّى الضلع $\overline{أ جـ}$ المقابل للزاوية القائمة وتراً، والضلعان $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ضلعا القائمة.

والنظرية التالية تصف علاقة بين أطوال اضلاع المثلث القائم الزاوية.

الشكل (٤-٣٢)

نظرية فيثاغورث: اذا كان المثلث قائم الزاوية فإنّ مربّع طول الوتر يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين.

ففي الشكل (٤-٣٢) أعلاه: $(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$

وعكس هذه النظرية صحيح أيضاً، أي أنّه:

اذا كان مربّع طول أحد أضلاع مثلث يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين فإنّ المثلث قائم الزاوية، وزاويته القائمة هي الزاوية التي تقابل الضلع الأطول.

مثال: إذا كان أ ب جـ مثلث، وكان أ ب = ١٤ سم، ب جـ = ٦ سم،

أ جـ = ٤ $\sqrt{١٠}$ فاثبت أنّ المثلث قائم الزاوية

الحل: بما أنّ $(أ\ ب)^٢$ = ١٩٦ $سم^٢$

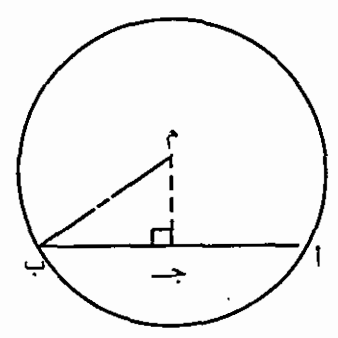
$(ب\ جـ)^٢$ = ٣٦ $سم^٢$

$(أ\ جـ)^٢$ = ١٦٠ $سم^٢$

فإنّ $(أ\ ب)^٢ = (أ\ جـ)^٢ + (ب\ جـ)^٢$

وعليه، فإنّ المثلث قائم الزاوية في جـ (الزاوية المقابلة للضلع $\overline{أ\ ب}$).

مثال: دائرة مركزها م. $\overline{أ\ ب}$ وتر في الدائرة. اذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم، فأوجد بعد مركز الدائرة عن الوتر $\overline{أ\ ب}$.



المعطيات: دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ١٣ سم

$\overline{أ\ ب}$ وتر في الدائرة طوله ٢٤ سم

$\overline{م\ جـ}$ عمود من مركز الدائرة على $\overline{أ\ ب}$

فيكون م جـ هو بُعد المركز م عن الوتر $\overline{أ\ ب}$

المطلوب : ايجاد م جـ

الحل: بما أنّ $\overline{م\ جـ}$ عمود نازل من مركز الدائرة على الوتر $\overline{أ\ ب}$ فإنّه ينصّفه أي أن جـ منتصف $\overline{أ\ ب}$

∴ جـ ب = ١٢ سم

وبتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم الزاوية م جـ ب:

$(م\ ب)^٢ = (م\ جـ)^٢ + (جـ\ ب)^٢$

١٦٩ = $(م\ جـ)^٢$ + ١٤٤

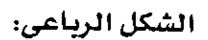
∴ (م جـ)^{2} = ٢٥ ومنها م جـ = ٥ سم

أي أنّ مركز الدائرة يبعد عن الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ مسافة ٥ سم

سؤال: إذا كان طول وترٍ في دائرة يساوي ٨ سم وبُعده عن مركز الدائرة ٣ سم.

أوجد طول نصف قطر الدائرة.

(٤ ـ ٥) الأشكال الرباعيّة:



الشكل الرباعي:

منحنى مغلق بسيط مكوّن من قطع مستقيمة عددها أربع. أو هو مضلع عدد أضلاعه أربعة. فالخواص الجوهريّة المميزة للشكل الرباعي هي:

د أ ب جـ

الشكل (٤-٣٣)

١) منحنى مغلق بسيط

٢) مكون من قطع مستقيمة

٣) عدد القطع المستقيمة أربع

سؤال: الشكل (٤-٣٣) شكل رباعي ، اذكر

١) أضلاع الشكل.

٢) رؤوس الشكل.

٣) أقطار الشكل.

ومن الخواص الثانوية للشكل الرباعيّ أنّ مجموع قياسات زواياه الداخليّة يساوي٣٦٠°

وعند إضافة خواص أخرى للخواص الجوهرية للشكل الرباعي نحصل على حالات خاصّة من الشكل الرباعي، ويترتب على ذلك بعض الخواص الثانويّة. وفيما يلي عرض للحالات الخاصّة للشكل الرباعي.

شبه المنحرف:

هو شكل رباعي فيه ضلعان على الأقل متوازيان.

سؤال: ما هي الخواص الجوهريّة لشبه المنحرف؟

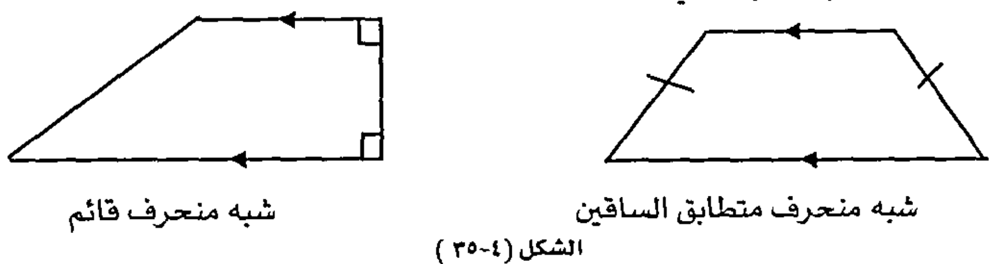
الشكل (٤-٣٤) شكل رباعي فيه $\overline{\text{أد}} \parallel \overline{\text{بج}}$

فهو شبه منحرف.

يُسمّى الضلعان المتوازيان قاعدتا شبه المنحرف، والضلعان الآخران ساقا شبه المنحرف، وطول العمود بين القاعدتين يُسمّى ارتفاع شبه المنحرف. واذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين سُمّي شبه منحرف متطابق الساقين. أما إذا كان أحد ساقي شبه المنحرف على الأقل عمودياً على القاعدتين سُمّي شبه منحرف قائم.

الشكل (٤-٣٤)

انظر الشكل (٤-٣٥) التالي:



الشكل (٤-٣٥)

ولشبه المنحرف خواص ثانوية غير خواصّه كمضلع وكشكل رباعي ترتّبت على إضافة خاصة توازي ضلعين من اضلاعه لخواصه الجوهرية، منها:

(١) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ساقي شبه المنحرف توازي كلاً من القاعدتين وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

ففي الشكل (٤-٣٦):

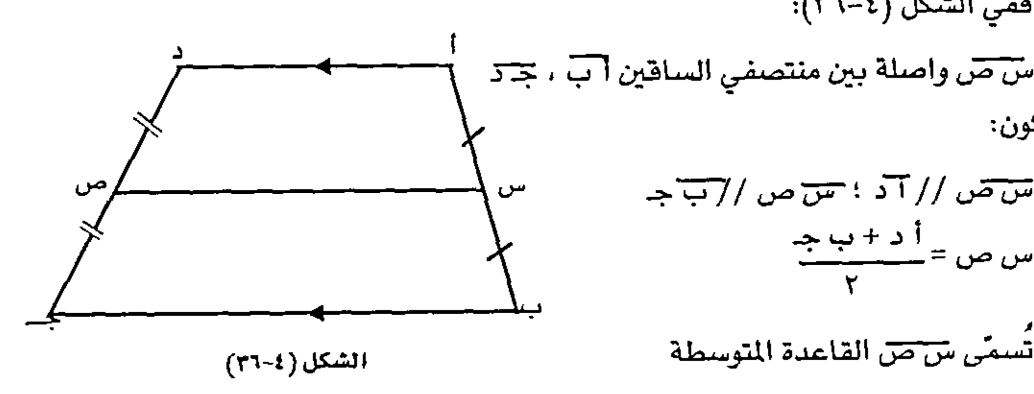
$\overline{\text{س ص}}$ واصلة بين منتصفي الساقين $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جد}}$

فيكون:

$\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{أد}}$ ؛ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب ج}}$

$$\text{س ص} = \frac{\text{أ د} + \text{ب ج}}{2}$$

تُسمّى $\overline{\text{س ص}}$ القاعدة المتوسطة



الشكل (٤-٣٦)

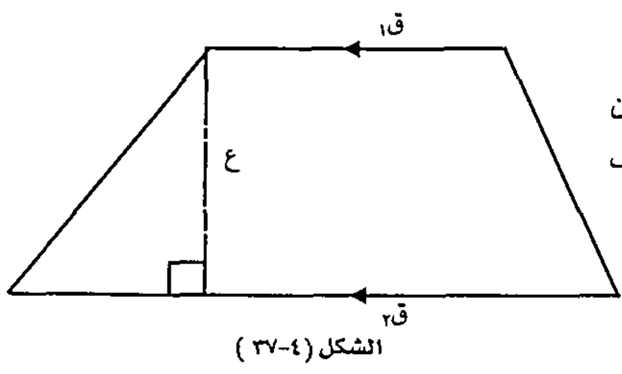
(٢) مساحة المنطقة الداخليّة لشبه المنحرف تساوي نصف مجموع طولي القاعدتين مضروباً في الارتفاع.

ففي الشكل (٤-٣٧)

اذا رمزنا لطولي القاعدتين بالحرفين $ق_1$ ، $ق_2$ وللارتفاع بالحرف ع فإنّ:

مساحة داخليّة شبه المغرف

$$= \frac{ق_1 + ق_2}{2} \times ع$$



الشكل (٤-٣٧)

= طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع

هاتان الخاصتان الثانويتان ثابتتان لشبه المنحرف، ومن خواصّه الثانوية المتغيرة:

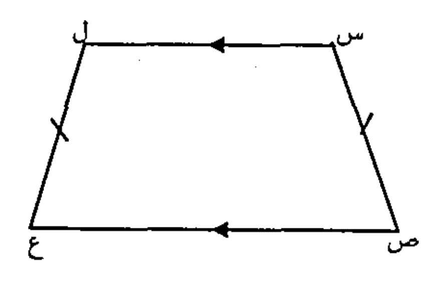
(٣) إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين فإن زاويتي كل قاعدة متطابقتان أو متكاملتان.

أ د ب جـ

في هذه الحالة:

الزاويتان $\hat{أ}$ ، $\hat{د}$ متكاملتان

والزاويتان $\hat{ب}$، $\hat{جـ}$ متكاملتان



في هذه الحالة:

الزاويتان $\hat{س}$، $\hat{ل}$ متطابقتان

والزاويتان $\hat{ص}$، $\hat{ع}$ متطابقتان.

الشكل (٤-٣٨)

مثال : في الشكل (المجاور)

أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الساقين

فيه ق ($\hat{ب}$) = ٧٠° أوجد قياسات الزوايا $\hat{أ}$، $\hat{د}$، $\hat{جـ}$

الحل: $\hat{جـ} \cong \hat{ب}$ زاويتا القاعدة $\overline{ب جـ}$

لشبه منحرف متطابق الساقين

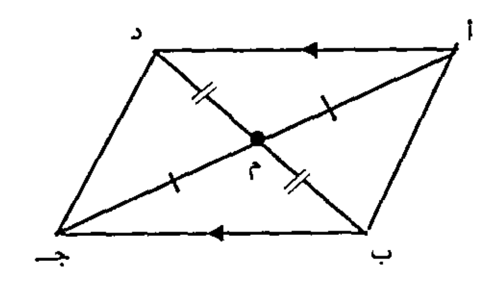
$\therefore$ ق ($\hat{جـ}$) = ٧٠°

ولأنّ $\overleftrightarrow{أ د}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$، $\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما فإنّ الزاويتين $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ متكاملتان. لماذا؟

$\therefore$ ق ($\hat{أ}$) = ١١٠° وكذلك ق ($\hat{د}$) = ١١٠°

الشكل (٤-٣٩)

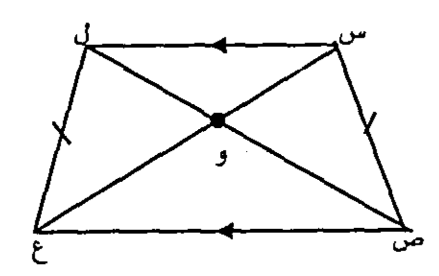
(٤) اذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين فإنّ قطريه متطابقان أو متناصفان.



في هذه الحالة:

القطران $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب د}$

متناصفان وغير متطابقين



في هذه الحالة:

القطران $\overline{س ع}$ ، $\overline{ص ل}$

متطابقان وغير متناصفين

الشكل (٤-٣٩)

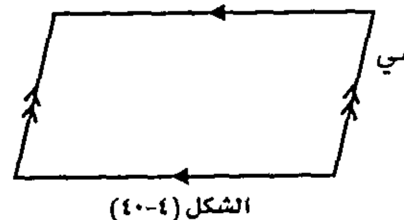
متوازي الأضلاع:

شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان: أي أن متوازي الاضلاع هو شبه منحرف ساقاه متوازيان.

وعلى ذلك فإنّ الخواص الجوهريّة لمتوازي الاضلاع هي

١) منحنى مغلق بسيط

٢) مكوّن من قطع مستقيمة



الشكل (٤-٤٠)

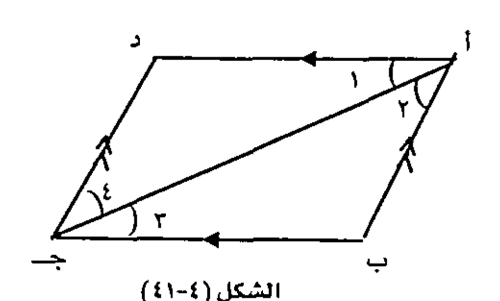
٣) عدد القطع المستقيمة أربع

٤) كل ضلعين متقابلين متوازيان.

ولمتوازي الأضلاع خواص ثانوية عديدة. فبالاضافة للخواص الثانوية لشبه المنحرف نذكر الخواص التالية:

(١) كل قطر في متوازي الأضلاع يصنع مع أضلاعه مثلثين متطابقين.

البرهان المثلثان أ ب جـ ، جـ د أ فيهما



الشكل (٤-٤١)

$\hat{١} \equiv \hat{٣}$ زاويتان متبادلتان

$\hat{٤} \equiv \hat{٢}$ زاويتان متبادلتان

$\overline{أ جـ} \equiv \overline{أ جـ}$ ضلع مشترك

∴ يتطابق المثلثان بحالة (ز ض ز)

وهو المطلوب

ومن النتائج المباشرة لهذا التطابق الخاصتان ٢ ، ٣ التاليتان

(٢) كل ضلعين متقابلين متطابقان

(٣) كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

(٤) قطرا متوازي الأضلاع متناصفان

(٥) مساحة المنطقة الداخلية لمتوازي الأضلاع

= طول أحد الاضلاع × البُعد بينه وبين الضلع المقابل

= طول القاعدة × الارتفاع

الشروط الكافية لمتوازي الأضلاع:

لاختبار أنّ شكلاً رباعيّاً هو متوازي أضلاع لا بُدّ من التأكد من توفر الخواص الجوهريّة لمتوازي الأضلاع. الخواص الثلاث الأولى متوفرة في الشكل الرباعي، يبقى بعد ذلك اثبات أنّ كل ضلعين متقابلين متوازيان. وقد مرّ سابقاً كيف نثبت أنّ مستقيمين متوازيان.

وهناك شروط أخرى اذا توفّر أحدها في الشكل الرباعي أمكن اثبات أنّ كلّ ضلعين متقابلين متوازيان، أي أن الشكل الرباعي يكون متوازي اضلاع. والنظريّة التالية تحدّد هذه الشروط.

نظريّة: يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا تحقق أحد الشروط التالية:

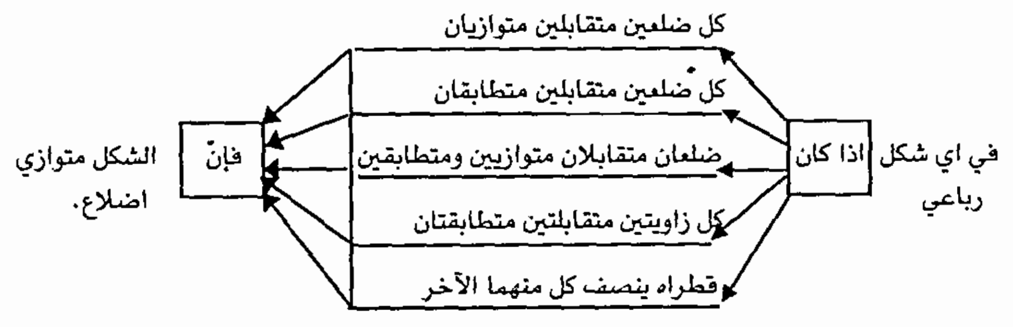
١) كل ضلعين متقابلين متطابقان.

أو ٢) فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

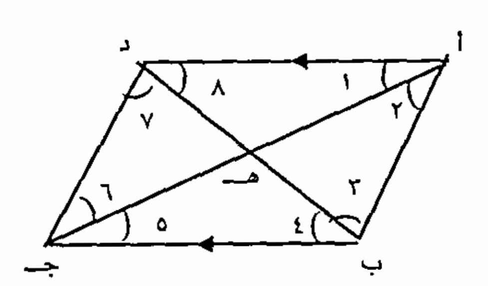
أو ٣) كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

أو ٤) قطراه ينصّف كل منهما الآخر.

والمخطط التالي يلخص الطرق التي يمكن اتباعها لاثبات أنّ شكلاً رباعيّاً هو متوازي أضلاع.



سؤال: لكل من الشروط التالية، حدّد ما اذا كان الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع معلّلاً إجابتك.



١) $\overline{أب} \cong \overline{دجـ}$ ، $\hat{٢} \cong \hat{٦}$

٢) ق (د $\hat{أ}$ ب) = ٧١ ، ق (أ $\hat{د}$ جـ) = ١٠٩°

$\hat{٨} \cong \hat{٤}$

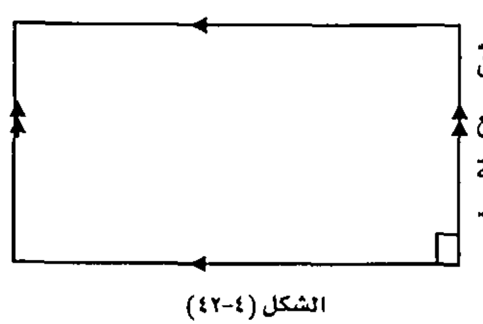
٣) Δ أ هـ د $\cong \Delta$ جـ هـ ب

٤) Δ د أ ب $\cong \Delta$ ب جـ د

٥) أ ب ≅ ٨ سم ، أ د = ٨ سم

ب جـ = ٤ سم ، جـ د = ٤ سم

المستطيل :


الشكل (٤-٤٢)

هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة ولأنّ المستطيل متوازي أضلاع فإنّ للمستطيل جميع خواص متوازي الأضلاع الجوهريّة والثانويّة بالأضافة للخاصّة الجوهريّة "إحدى زواياه قائمة" وما يترتّب عليها من خواص ثانويّة ، ومنها :

١) جميع زوايا المستطيل قوائم

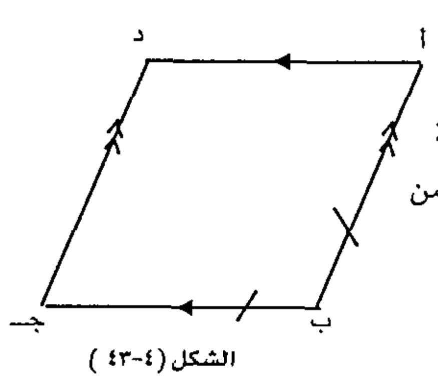
٢) قطرا المستطيل متطابقان

٣) مساحة المنطقة المستطيلة = حاصل ضرب طولي ضلعين متجاورين

= الطول × العرض

٤) محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

المعين:



الشكل (٤-٤٣)

هو متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان وللمعين كافّة خواص متوازي الأضلاع الجوهريّة منها والثانوية بالأضافة للخاصة الجوهريّة "فيه ضلعان متجاوران متطابقان" وما يترتب عليها من خواص ثانوية، ومنها:

١) جميع أضلاع المعين متطابقة

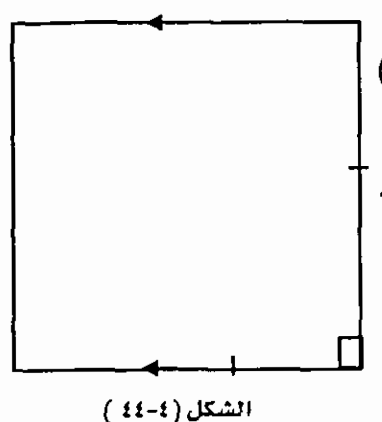
٢) قطرا المعين متعامدان

٣) كل قطر في المعين ينصّف زاويتي المعين عند طرفيه

٤) محيط المعين = ٤ × طول الضلع.

٥) مساحة المنطقة الداخلية للمعين = نصف حاصل ضرب طولي قطريه.

المربّع:



الشكل (٤-٤٤)

هو متوازي اضلاع احدى زواياه قائمة (مستطيل) وفيه ضلعان متجاوران متطابقان (معين).

وعليه فإنّ المربّع يجمع خواصف المستطيل والمعين.

فمن تعريف المربع نجد أنّ خواصه الجواهريّة هي:

١) منحنى مغلق بسيط

٢) مكوّن من قطع مستقيمة

٣) عدد القطع المستقيمة أربع

٤) كل ضلعين متقابلين متوازيين

٥) احدى زواياه قائمة

٦) فيه ضلعان متجاوران متطابقان

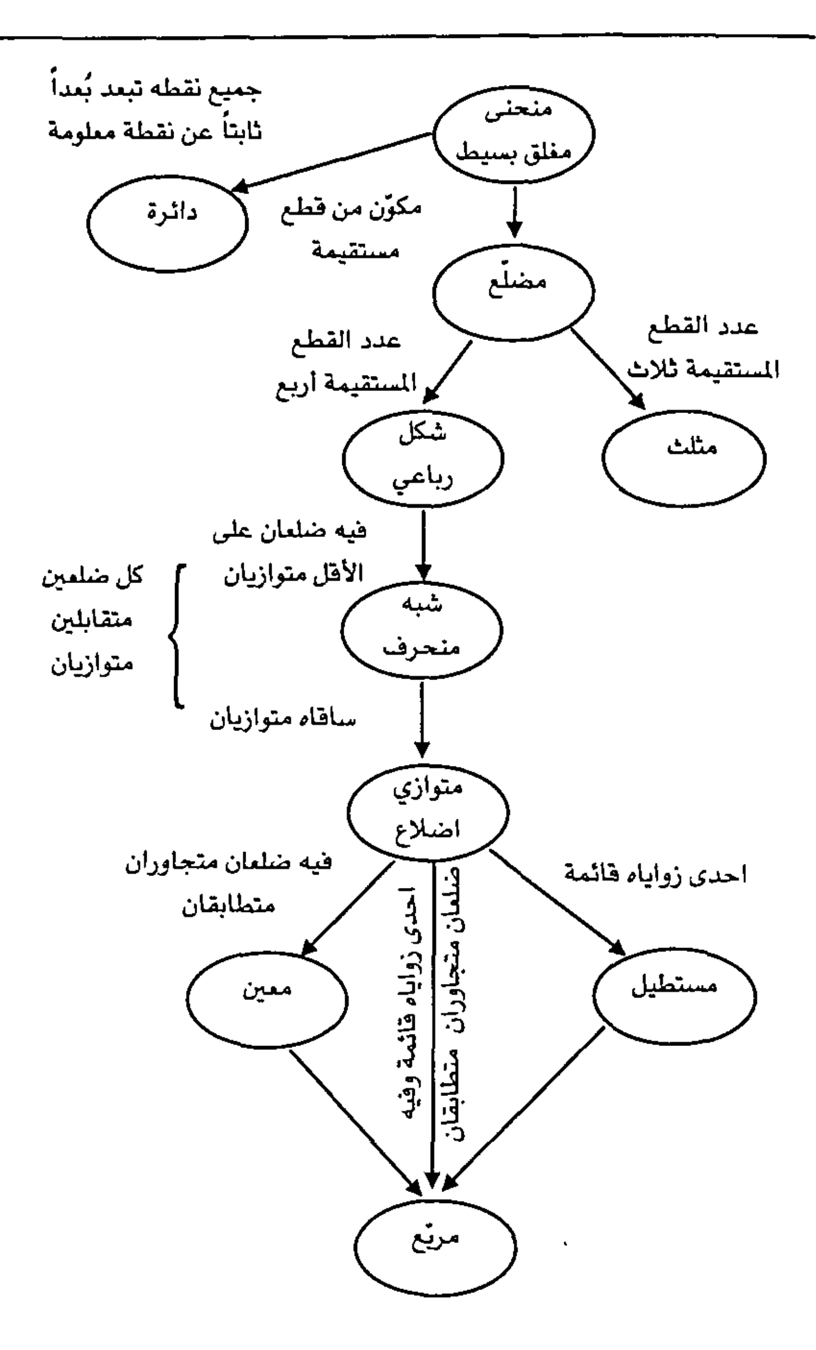
ومن خواصّه الثانويّة:

١) قطراه متعامدان ومتناصفان ومتطابقان

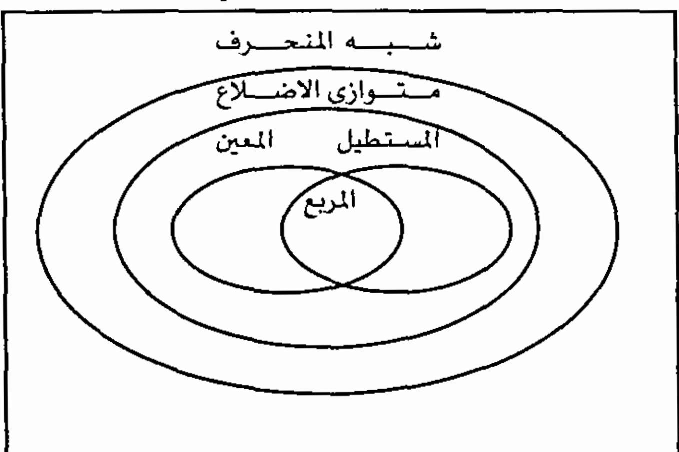
٢) مساحة المنطقة المربعّة = مربع طول الضلع.

سؤال: اذكر خواص ثانوية أخرى للمربّع مسترشداً بخواص كل من المستطيل والمعين.

والمخطط التالي يبيّن العلاقة بين المفاهيم السابقة



كما يوضّح الشكل التالي العلاقة بين الحالات الخاصّة المختلفة للشكل الرباعي.


الشكل الرباعي
شبه المنحرف
متوازي الاضلاع
المستطيل
المعين
المربع

ملحق (١)

مسلمات الهندسة الأقليديّة الحديثة:

لهندسة اقليدس عيوب ونقاط ضعف كثيرة. فلم يكن يفرق بين المعرّف وغير المعرّف، فاستخدم الفاظاً غير معرّفة لتعريف الفاظ أخرى. كما أنّه استعمل مسلمات في براهينه غير التي حَدّدها. وقد أُعيد صياغة هندسة اقليدس بحيث تمّ معالجة كافّة العيوب فيها. وتضمنت الصياغة الحديثة لهندسة اقليدس (٢١) مسلمة نذكرها فيما يلي:

(م$_{١}$) : المستقيم مجموعة من النقط تحوي نقطتين على الأقل.

(م$_{٢}$) : كل نقطتين مختلفتين يحويهما مستقيم واحد فقط.

(م$_{٣}$): المستوى مجموعة من النقط تحوي ثلاث نقط على الأقل مختلفة وغير مستقيمة.

(م$_{٤}$) : كل ثلاث نقط مختلفة وغير مستقيمة يمّر بها مستوى واحد فقط.

(م$_{٥}$) : اذا وقعت نقطتان مختلفتان في مستوى فإنّ المستقيم الذي يمّر بهما يقع بالكامل في ذلك المستوى.

(م$_{٦}$) : اذا اشترك مستويان في نقطة فإنّ تقاطعهما مستقيم.

(م$_{٧}$) : الفضاء مجموعة من النقط تحوي على الأقل اربع نقط غير مستوية.

(م$_{٨}$) : لكل نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يوجد مستقيم وحيد يمرّ بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

(م$_{٩}$) : مسلمة المسافة وقياسها: اذا كانت أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ نقطتين مختلفتين، فإنّه يوجد تقابل يربط كل زوج من النقط بعدد حقيقي وحيد غير سالب (د) بحيث:

(i) د = ١ للنقطتين أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$

(ii) د = صفر اذا كانت أ$_{١}$ = أ$_{٢}$

(iii) د > ٠ اذا كانت أ$_{١}$ ≠ أ$_{٢}$

تُسمّى المجموعة و = { أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ } زوج الوحدة، ويُسمّى العدد (د) مقياس المسافة بين النقط بالنسبة لزوج الوحدة. ولأي نقطتين ع ، ل نرمز لقياس المسافة بينهما بأحد الرمزين.

م$_{و}$ (ع ، ل) أو م$_{و}$ (ل ، ع)

(م$_{١٠}$) : إذا كان و$_{١}$ = { أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$} ؛ و$_{٢}$ = {ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$} فإنّه لكل نقطتين ع ، ل

يكون: $\frac{م_{و_١}(ع ، ل)}{م_{و_٢}(ع ، ل)} = م_{و_١}(ب١ ، ب٢)$

($م_{١١}$): اذا كانت ع نقطة على مستقيم ن، وكان و = {$أ_١$ ، $أ_٢$} زوج وحدة؛ فإنّه يوجد على الأقل نقطة ل على المستقيم ن بحيث:

$م_و$ (ل ، ع) = ١

($م_{١٢}$) : مسلمة المسطرة: لتكن ع نقطة على مستقيم ن، وليكن و = {$أ_١$ ، $أ_٢$} زوج وحدة. اذا كانت ل نقطة على المستقيم ن بحيث $م_و$ (ع، ل) = ١ فإنّه يوجد تقابل بين الأعداد الحقيقيّة ونقط المستقيم ن بحيث:

(i) العدد "٠" يقابل النقطة ع

(ii) العدد "١" يقابل النقطة ل

(iii) لكل نقطتين ك ، هـ على المستقيم ن يكون $م_و$ (ك،هـ) يساوي القيمة المطلقة للفرق بين العددين المقابلين للنقطتين ك ، هـ.

تسمّى النقطة المقابلة للعدد "٠" نقطة الأصل، والنقطة المقابلة للعدد "١" نقطة الوحدة. والعدد المقابل لأي نقطة على المستقيم يُسمّى احداثيي تلك النقطة.

وللاختصار يُرمز لـ $م_و$ (ع،ل) بالرمز ع ل أو ل ع

تعريف – علاقة الترتيب (البينيّة):

تكون النقطة جـ بين النقطتين أ، ب

اذا وفقط اذا كان:

(i) أ، ب، جـ نقط مستقيمة

(ii) أ جـ + جـ ب = أ ب

تعريف – القطعة المستقيمة:

هي مجموعة من النقط تتكون من نقطتين مختلفتين أ، ب وما بينهما من نقط. ويرمز لها بأحد الرمزين $\overline{أ ب}$ أو $\overline{ب أ}$.

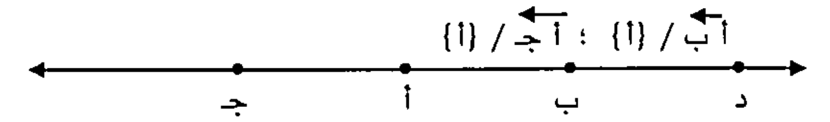
تُسمّى النقطتان أ،ب طرفا القطعة المستقيمة ومجموعة النقط الواقعة بين أ،ب تسمّى داخليّة القطعة $\overline{أ ب}$.

تعريف - الشعاع:

للتكن أ،ب نقطتين مختلفتين. تُسمّى مجموعة النقط المكوّنة للقطعة $\overline{أب}$ وجميع النقط ج حيث ب بين أ ، جـ شعاعاً. ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{أب}$. وتُسمّى نقطة أ طرف الشعاع $\overleftarrow{أب}$.

والشعاعان المشتركان في نقطة طرف واتحادهما يصنع خطّاً مستقيماً شعاعان متعاكسان. ونقطة الطرف المشتركة تقسم بقيّة نقط المستقيم إلى مجموعتين كل واحدة منها على جهة من هذه النقطة، وهاتين المجموعتين هما:

$\overleftarrow{أب}$ / {أ} ؛ $\overleftarrow{أجـ}$ / {أ}



تُسمّى كل من هاتين المجموعتين نصف مستقيم بحيث:

(١) اذا كانت النقطتان ب ، د في جهة واحدة من أ فإنّ جميع النقط الواقعة بين ب ، د تقع في الجهة نفسها.

(٢) اذا كانت ب ، جـ في جهتين مختلفتين من النقطة أ فإنّ القطعة $\overline{ب جـ}$ تحوي نقطة أ كنقطة داخليّة.

تعريف - المجموعة المحدّبة:

تكون مجموعة من النقط محدّبة اذا كانت كل قطعة مستقيمة طرفاها ينتميان للمجموعة محتواة بكاملها في تلك المجموعة.

فنصفا المستقيم مجموعتان محدّبتان.

(م$_{١٣}$): مسلمة تقسيم المستوى: إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ واقعاً في المستوى س فإنّ مجموعة نقط المستوى التي لا تقع على المستقيم تنقسم إلى مجموعتين بحيث:

(١) كل مجموعة منهما محدّبة.

(٢) اي قطعة مستقيمة طرفاها ينتميان لمجموعتين مختلفتين تتقاطع مع الخط المستقيم.

تُسمّى كل مجموعة من هاتين المجموعتين نصف مستوى، والمستقيم الذي يقسم المستوى إلى نصفين لا يقع في أيّ منهما ويُسمّى حافّة كل من نصفي المستوى.

(م$_{١٤}$) : إذا كان م عدداً حقيقيّاً موجباً فإنّه يوجد تقابل يربط كل زاوية بعددٍ موجب يقع بين الصفر والعدد م .

يُسمّى العدد م عامل القياس، والعدد المعيّن لزاوية مفروضة ∡ أ ب جـ يسمّى قياس الزاوية بالنسبة لعامل القياس م ويرمز له بالرمز $ق_م$ (∡ أ ب جـ).

($م_{١٥}$) : اذا كان $م_١$ ، $م_٢$ عددين موجبين فإنّه، لأي زاوية ∡ أ ب جـ يكون

$$ق_{م_١} (∡ أ ب جـ) = \frac{م_١}{م_٢} ق_{م_٢} (∡ أ ب جـ)$$

($م_{١٦}$) : مسلمة المنقلة: اذا كان ن نصف مستوى وكان $\overleftarrow{و أ}$ شعاعاً واقعاً على حافة ن، وكان م عدداً حقيقيّاً موجباً فإنّه يوجد تقابل بين [٠ ، م] ومجموعة الأشعة $\overleftarrow{و س}$ الواقعة في اتحاد ن وحافته بحيث:

(١) $\overleftarrow{و أ}$ يقابل العدد "٠"

(٢) الشعاع المعاكس للشعاع $\overleftarrow{و أ}$ يقابل العدد م

(٣) اذا كانت النقطتان س ، ص ليستا على استقامة مع و ؛ وكان س ، ص عددين يقابلان $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ على الترتيب فإنّ

$$ق_م (س \hat{و} ص) = [س - ص]$$

($م_{١٧}$) – مسلمة تطابق المثلثات: اذا وجد تقابل بين مثلثين بحيث كان ضلعان والزاوية المعينة بهما في مثلث تطابق الأجزاء المناظرة لها في المثلث الثاني فإنّ هذا التقابل يُسمى تطابقاً، ويكون المثلثان متطابقين.

($م_{١٨}$) – مسلمة المساحة: اذا كانت ر منطقة مربعّة فإنّه يوجد اقتران يربط كل منطقة مضلّعة بعدد حقيقي موجب حيث ترتبط المنطقة المربعة ر بالعدد ١ يسمّى المربع الذي يحدّ المنطقة مربع الوحدة، والعدد الذي يرتبط بمنطقة مضلعة يسمّى مساحة هذه المنطقة نسبة إلى مربع الوحدة.

($م_{١٩}$) اذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ منطقتين مضلعتين داخليتاهما منفصلتان فإنّ مساحة اتحادهما يساوي مجموعة مساحتيهما نسبة إلى مربّع وحدة.

($م_{٢٠}$) اذا تطابق مثلثان فإن مساحتي منطقتيهما متساويتان نسبة إلى مربع وحدة.

($م_{٢١}$) : اذاً كانت د منطقة مربعة طول ضلعها يساوي ١ نسبة إلى زوج الوحدة و فإنّ مساحة اي منطقة مستطيلة ط نسبة إلى ر تساوي حاصل ضرب طولي ضلعين متجاورين من ط قيسا نسبة إلى و.

الجزء الثاني

أسس الرياضيات

الوحدة الأولى

المنطق

(١-١) العبارة:

ينظر كثير من العلماء والمربين للرياضيات على أنها لغة العلوم، لأنها تستخدم تعابير ومصطلحات محددة المعنى ومعرفة بدقة. وهذه التعابير تدخل في تكوين جمل خبرية إما أن تكون صحيحة فقط أو خطأ فقط. ولا يمكن أن تكون صححة وخطأ في آن واحد. مثل هذه الجمل الخبرية تسمى عبارات.

فالعبارة هي جملة خبرية يمكن الحكم عليها بالصحة أو الخطأ وليس كليهما. والعبارات في الرياضيات نوعان: نوع نسلم بصحته (أو نفرض صحته) دون برهان ويسمى مسلمات. ونوع آخر نبرهن على صحته استنتاجاً من أو اعتماداً على صحة عبارات أخرى. ويقوم البرهان على عدد من المبادىء المنطقية تمكننا من إجراء استنتاجات صحيحة من مقدمات مفروضة.

والعلم الذي يزودنا بالأطر الصحيحة لصياغة العبارات في الرياضيات كي تعبر عن المعنى المقصود بدقة ووضوح، ويزودنا بالأسس والقواعد التي نعتمد عليها في تحديد صحة أو خطأ العبارات هو المنطق.

وقبل أن نبدأ في تناول الأفكار الرئيسية في المنطق نقدم الأمثلة التالية على العبارة:

١ - المستطيل هو شكل رباعي. عبارة صحيحة

٢- ٩ > ٨ عبار صحيحة

٣- ٩ = ٠ × ٩ عبارة خطأ

٤- زوايا المربع قوائم عبارة صحيحة

٥- ١٤= ٨+٧ عبارة خطأ

وكون العبارة "صحيحة" أو "خطأ" سنطلق عليه قيمة الصواب للعبارة. وللاختصار سنرمز للعبارة بحرف من حروف الهجاء ف، ن، هـ، و، أ، ب، ...

ولقيمة الصواب "صحيحة" بالحرف ص. ولقيمة الصواب "خطأ" بالحرف خ.

(١-٢) نفي العبارة:

إذا كانت ف عبارة فإن نفيها عبارة أيضاً، ويرمز لها بالرمز ~ف" ويقرأ "ليس ف" وقيمة الصواب لنفي عبارة عكس قيمة الصواب لتلك العبارة.

والجدول (١-١) يبين قيم الصواب لكل من ف، ~ ف.

جدول (١-١)

العبارة ونفيها	ف	~ ف
قيم الصواب	ص	خ
	خ	ص

وفيما يلي أمثلة على عبارات ونفيها:

العبارة ف	قيمة الصواب	نفي العبارة ~ ف	قيمة الصواب
العدد ٧ عدد فردي	ص	العدد ٧ ليس فردياً	خ
قطرا متوازي الأضلاع متطابقان	خ	قطرا متوازي الأضلاع ليسا متطابقين	ص
٥ + ٧ = ١٣	خ	٥ + ٧ ≠ ١٣	ص
العدد ٣ عامل من عوامل ١٢	ص	العدد ٣ ليس عاملاً من عوامل ١٢	خ
مركز الدائرة إحدى نقط الدائرة	خ	مركز الدائرة ليست نقطة من نقط الدائرة	ص
مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°	ص	مجموع قياسات زوايا المثلث ليست ١٨٠°	خ

إن تحديد قيمة الصواب للعبارات البسيطة التي تتضمن خبراً واحداً يعتمد على المعارف الرياضية التي تزودنا بها التعريفات أو النظريات. أما العبارات المركبة والمكونة من عبارتين بسيطتين أو أكثر فإن قيمة الصواب لها تعتمد على قيم الصواب للعبارات البسيطة المكونة لها بالإضافة إلى أدوات الربط التي تربط بين هذه العبارات البسيطة.

(١-٣) العبارة المركبة:

إذا كانت ف،ن عبارتين بسيطتين فإن الجملة الناتجة من ربط هاتين العبارتين بأداة من أدوات الربط ... و... ، .... أو ....، إذا كان ... فإن ... ، .... إذا وفقط إذا كان ....، تكون عبارة أيضاً وتسمى عبارة مركبة.

وعند البحث في قيمة الصواب لعبارة مركبة مكونة من عبارتين ف ، ن فإننا سنصادف الحالات الأربعة التالية :

	قيمة الصواب للعبارة (ف)	قيمة الصواب للعبارة (ن)
الحالة الأولى	ص	ص
الحالة الثانية	ص	خ
الحالة الثالثة	خ	ص
الحالة الرابعة	خ	خ

وقيمة الصواب للعبارة المركبة في الحالات الأربعة تعتمد على اداة الربط التي تربط العبارتين ف، ن. وسنتعرف فيما يلي على قيم الصواب للعبارات المركبة عند استخدام أدوات الربط السابق ذكرها.

اولاً: أداة الوصل "و" ورمزها "٨"

إذا كانت ف،ن عبارتين فإن قيم الصواب للعبارة المركبة (ف ٨ ن) في الحالات الأربعة يبينها الجدول (١ - ٢) التالي:

جدول (١ - ٢)

ف	ن	ف ٨ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

نلاحظ من هذا الجدول أن العبارة (ف ٨ ن) تكون صحيحة في حالة واحدة عندما تكون مركبتاها صحيحتين.

مثال (١): ما قيمة الصواب للعبارة: العدد (٩) أولي والعدد (٧) فردي " ؟

الحل: إذا رمزنا للعبارة " العدد (٩) أولي " بالرمز (ف) وللعبارة " العد (٧) فردي، بالرمز (ن). فإن العبارة المطلوب معرفة قيمة الصواب لها هي (ف ٨ ن).

وبما أن العبارة (ف) خطأ. والعبارة (ن) صحيحة فإن العبارة (ف ٨ ن) خطأ.

نتيجة: إذا كانت ف ٨ ن خطأ، وكانت ف صحيحة، فإن ن خطأ.

وهذه النتيجة مبدأ من مبادىء الاستنتاج الرياضي المنطقي.

مثال (٢): إذا كانت ف ، ن عبارتين بسيطتين، فما قيم الصواب للعبارة (ف ٨ (~ ن))؟

الحل: إن قيمة الصواب للعبارة (ف ٨ (~ ن)) مبينة في الجدول (١ - ٣) التالي:

جدول (١ - ٣)

ف	ن	~ن	ف ٨ (~ن)
ص	ص	خ	خ
ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	خ
خ	خ	ص	خ

من الجدول السابق يتضح أن العبارة (ف ٨ (~ ن)) تكون صحيحة في حالة واحدة فقط عندما تكون العبارة (ف) صحيحة والعبارة (ن) خطأ.

ثانياً: أداة الفصل "أو" ورمزها "٧" :

إذا كانت ف ، ن عبارتين بسيطتين فإن قيم الصواب للعبارة المركبة (ف ٧ ن) يبينها الجدول (١ - ٤) التالي :

جدول (١ - ٤)

ف	ن	ف ٧ ن
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

نلاحظ من هذا الجدول أن العبارة (ف ٧ ن) تكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتين ف، ن على الأقل صحيحة.

مثال (٣): ما قيمة الصواب للعبارة: ٥ < ٧ أو ٥=٧

تكتب هذه العبارة عادة بالشكل المختصر (٥ ≤ ٧) وتقرأ العدد ٥ أصغر من أو يساوي ٧

الحل: إذا رمزنا للعبارة " ٥ < ٧" بالرمز (ف)، وللعبارة " ٥ = ٧" بالرمز (ن)، فإن العبارة المطلوب معرفة قيمة الصواب لها هي (ف ٧ ن).

وبما أن ف عبارة صحيحة و ن عبارة خطأ فإن العبارة (ف ٧ ن) صحيحة.

نتيجة: إذا كانت (ف ٧ ن) صحيحة، وكانت (ف) خطأ، فإن ن صحيحة. وهذا مبدأ آخر من مبادىء الاستنتاج الرياضي المنطقي.

مثال (٤): إذا كانت ف، ن عبارتين بسيطتين، فما قيم الصوواب للعبارة:

(~ ف) ٧ (~ ن)

الحل: إن قيم الصواب للعبارة ((~ف) ٧ (~ ن)) مبينة في الجدول (١ - ٥) التالي:

جدول (١ - ٥)

ف	ن	~ف	~ن	(~ف) ٧ (~ن)
ص	ص	خ	خ	خ
ص	خ	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	ص	ص	ص

من هذا الجدول نلاحظ أن العبارة ((~ف) ٧ (~ن)) تكون صحيحة دائماً ما عدا الحالة التي تكون فيها كل من العبارتين ف، ن صحيحة

ثالثاً: العبارة الشرطية

إذا كانت ف،ن عبارتين بسيطتين فإن العبارة المركبة "إذا كان ف فإن ن" تسمى عبارة شرطية، والعبارة ف التي تأتي بعد "إذا كان" تسمى مقدمة العبارة الشرطية أو الشرط. . وكذلك تسمى العبارة "ن" التي تأتي بعد "فإن" تالي العبارة الشرطية أو النتيجة. ويرمز لأداة الربط المنطقي "إذا كان ... فإن ... "بالرمز "... ← ....". وعليه فإن العبارة الشرطية " إذا كانت ف فإن ن" يرمز لها بالرمز (ف ← ن).

وتقرأ: إذا كانت ف فإن ن. أو ف تحتم ن. أو ف إذن ن. أو ف تستلزم ن.

والجدول (١-٦) التالي يبين قيم الصواب للعبارة الشرطية:

جدول (١ - ٦)

ف	ن	ف ↔ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

واضح من هذا الجدول أن العبارة الشرطية تكون صحيحة دائماً ما عدا الحالة التي تكون فيها مقدمة العبارة الشرطية صحيحة وتاليها خطأ.

فمثلاً: العبارة الشرطية: إذا كان ١×١=٢ فإن ١×٠ =١

مقدّمتها "١X١= ٢" عبارة خطأ وتاليتها "١ X ٠ = ١" عبارة خطأ لذلك فالعبارة الشرطية صحيحة. أما العبارة الشرطية: "إذا كان العدد ٩ فردياً فإن العدد ٩ أولي" فهي عبارة خطأ لأن مقدمتها "العدد ٩ فردي" عبارة صحيحة. وتاليتها "العدد ٩ أولي" عبارة خطأ.

نتيجة: إذا كان "ف←ن" صحيحة، وكانت (ف) صحيحة فإن (ن) تكون صحيحة. وهذا مبدأ ثالث من مبادىء الاستنتاج المنطقي.

مثال (٥): إذا كانت (ف)، (ن) عبارتين بسيطتين فما قيم الصواب للعبارة التالية:

{ (ف← ن) ٨ (~ن) }←(~ف)

الحل: إن قيم الصواب للعبارة { (ف ←ن) ٨ (~ن)} ←(~ف) " مبينة في الجدول (١ - ٧) التالي:

الجدول (١-٧)

ف	ن	ف ←ن	~ن	(ف←) ٨ (~ن)	~ف	{ (ف ← ن) ٨ (~ن)} ← (~ف)
ص	ص	ص	خ	خ	خ	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ	ص
خ	ص	ص	خ	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص

نلاحظ من هذا الجدول أن العبارة: " { (ف ← ن) ٨ (~ن)} ←(~ف)" صحيحة دائما مهما كانت قيم الصواب لمركبتيها ف ، ن .

تسمى العبارة المركبة التي تكون صحيحة دائماً مهماً كانت قيم الصواب لمركباتها **تحصيل حاصل**. أما العبارة المركبة التي تكون خطأ دائماً مهما كانت قيم الصواب لمركباتها فتسمى **تناقض**.

مثال (٦): أثبت أن العبارة "ف ٨ (~ف)" تناقض.

الحل: الجدول (١-٨) التالي يبين قيم الصواب للعبارة "ف ٨ (~ف)".

الجدول (١-٨)

ف	~ف	ف ٨ (~ ف)
ص	خ	خ
خ	ص	خ

من العمود الأخير في هذا الجدول يتضح أن العبارة "ف ٨ (~ف)" خطأ دائماً فهي تناقض.

رابعاً: العبارة الشرطية المزدوجة

إذا كانت العبارة "ف تحتم العبارة ن"، والعبارة "ن تحتم العبارة ف" فإننا نكتب ذلك بالرموز كما يلي:

(ف ← ن) ٨ (ن ← ف)

تسمى هذه العبارة المركبة عبارة شرطية مزدوجة، وتكتب اختصاراً على النحو التالي:

(ف ↔ ن)

وتقرأ "ف إذا وفقط إذا كانت ن "

والجدول (١-٩) التالي يبين قيم الصواب للعبارة الشرطية المزدوجة (ف ⇔ ن) :

الجدول (١-٩)

ف	ن	ف ← ن	ن ← ف	(ف ← ن) ∧ (ن ← ف) أي (ف↔ن)
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

ومنه يتضح أن العبارة الشرطية المردوجة تكون صحيحة عندما تكون مركبتاها لهما قيمة الصواب نفسها، أي إما صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً.

مثال (٧): ما قيمة الصواب للعبارة الشرطية المزدوجة:

"العدد ٥ عدد زوجي إذا وفقط إذا كان العدد ٤ فردياً؟

الحل: إذا رمزنا للعبارة" العدد ٥ عدد زوجي "بالرمز (ف)، وللعبارة "العدد ٤ عدد فردي " بالرمز (ن). فإن العبارة المطلوب معرفة قيم الصواب لها تكون (ف↔ ن).

وبما أن (ف) عبارة خطأ، (ن) عبارة خطأ، فإن العبارة (ف ↔ن) صحيحة.

نتيجة: إذا كانت (ف ↔ ن) صحيحة، وكانت (ف) صحيحة، فإن (ن) صحيحة.

وإذا كانت (ف ↔ ن) صحيحة، وكانت (ف) خطأ فإن (ن) خطأ.

تمارين (١ -١)

٠١ عين العبارات فيما يلي. واذكر قيمة الصواب لكل منها:

١) ٥ X٧ = ٣٥

٢) ٨ +١ > ٩

٣) أوجد ٣٢٥ ÷ ٥

٤) العدد (١) هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب.

٥) س + ٤ = ١٠

٦) أضلاع المعين متطابقة.

٧) الزاوية الحادة قياسها أقل من ٩٠ .

٨) ( ) X ٣ = ٢٧,

٠٢ انف كل عبارة مما يلي:

١) ٧ <٦

٢) العدد (٢) عدد أولي.

٣) العدد (٦) عامل من عوامل العدد (٩).

٤) زوايا المثلث المتطابق الأضلاع متطابقة.

٥) المربع منحنى مغلق بسيط.

٠٣ ما قيمة الصواب لكل من العبارات المركبة التالية:

١) إذا كان العدد (١) عنصراً محايداً لعملية الجمع فإن "٢ + ١ = ٢ ".

٢) ٥ ≤ ٥

٣) العدد (٣) عدد فردي وأولي.

٤) إذا كان " ١ + ١ = ١" فإن " ١ X١ = ١ "

٥) العدد (٧) عامل من عوامل (٢١) والعدد (٣) عامل من عوامل العدد (٥).

٦) إذا كان العددان (٣)، (٥) فرديين فإن " ٣ + ٥ " عدد فردي.

٧) " ٥ > ٤" أو " -٥ > -٤ ".

٨) العدد (٨) عدد فردي أو زوجي.

٩) العدد (٩) فردي إذا وفقط إذا كان العددان (٤). (٥) فرديين.

٠٤ إذا كانت ف، ن عبارتين بسيطتين، فما قيم الصواب لكل عبارة مما يلي:

١) (~ف) ∨ ن.

٢) (~ف) ∧ (~ن).

٣) ف ← (~ن)

٤) (~ (ف ∨ (~ن)).

٥) ~ ((~ ف) ∨ (~ ن)).

٦) ((ف ∧ ن) ∧ ن) ← ف.

٧) ((ف ∨ ن) ∧ (~ ن)) ← ف

٨) ((ف ← ن) ∧ ف) ← (~ن)

٩) (ف ← ~ ن) ↔ ((~ ن) ← (~ ف)).

٠٥ إذا كانت ف، ن عبارتين فاثبت أن العبارة:

١) ف ∨ ~ (ف ∧ ن) تحصيل حاصل.

٢) (ف ∧ ن) ∧ ~ (ف ∨ ن) تناقض.

(١ - ٤) العبارات المتكافئة:

تكون العبارتان المركبتان متكافئتين إذا كانتا مكونتين من العبارات البسيطة نفسها ولهما قيم الصواب نفسها، فمثلاً: العبارتان ~ (ف ∧ن)، (~ ف) ∨ (~ ن)

مكونتان من العبارتين البسيطتين ف،ن والجدول (١ - ١٠) يبين قيم الصواب لهما:

جدول (١-١٠)

ف	ن	ف ∧ ن	~ (ف ∧ ن)	~ ف	~ ن	(~ ف) ∨ (~ ن)
ص	ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

وبمقارنة قيم الصواب المتناظرة للعبارتين في العمودين الرابع والأخير، نجد أن للعبارتين قيم الصواب نفسها، إذن فالعبارتان متكافئتان، وللاختصار نكتب:

~ (ف٨ن) ⇔ (~ف) ٧ (~ن) ويقرأ " ~ (ف ٨ ن) تكافيء (~ ف) ٧ (~ ن) "

ملاحظة: تسمى النتيجة

~ (ف ٨ ن) ⇔ (~ ف) ٧ (~ ن)

قانون دي مورجان لنفي العبارة (ف ٨ ن)

مثال (٨): انف العبارة "العدد (٧) فردي والعدد (٨) فردي".

الحل: نفي العبارة "العدد ٧ فردي والعدد (٨) فردي"، هو العبارة "العدد (٧) ليس فردياً أو العدد (٨) ليس فردياً.

مثال (٩): إذا كانت ف،ن عبارتين بسيطتين فأثبت أن :

~ (ف ٧ ن) ⇔ (~ ف) ٨ (~ ن)

الحل: إن قيم الصواب للعبارتين ~(ف ٧ ن)؛ (~ف) ٨ (~ ن) مبينة في الجدول (١ - ١١) التالي:

جدول (١ - ١١)

ف	ن	ف ٧ن	~(ف ٧ ن)	(~ف)	(~ن)	(~ف) ٨ (~ن)
ص	ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	ص	خ	خ
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

وبمقارنة قيم الصواب المتقابلة للعبارتين في العمودين الرابع والأخير، نجد أن للعبارتين قيم الصواب نفسها، ولأن كل منهما مكونة من العبارتين البسيطتين ف، ن فإنهما متكافئتان.

ملاحظة: تسمى النتيجة

~ (ف ٧ ن) ⇔ (~ ف) ٨ (~ ن)

قانون دي مورجان لنفي العبارة (ف ٧ ن)

تدريب: أثبت أنه إذا كانت ف، ن عبارتين بسيطتين فإن ~ (ف ← ن) ⇔ ف ∧(~ن)

تسمى هذه النتيجة قانون دي مورجان لنفي العبارة (ف ←ن).

مثال (١٠) أثبت أنه إذا كانت ف، ن، هـ عبارات بسيطة فإن:

(ف ←(ن ∧ هـ)) ⇔((ف ← ن) ∧ (ف← هـ)).

الحل: في هذا السؤال يوجد ثلاث عبارات بسيطة، ولذلك ستكون هناك ثمان حالات مختلفة مبينة في الأعمدة الثلاث الأولى من الجدول (١-١٢) التالي:

جدول (١ - ١٢)

ف	ن	هـ	ن ∧ هـ	ف ←(ن ∧ هـ)	(ف ←ن)	(ف ← هـ)	(ف ←ن) ∧ (ف ← هـ)
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	خ	خ	ص	خ	خ
ص	خ	ص	خ	خ	خ	ص	خ
ص	خ	خ	خ	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
خ	ص	خ	خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	ص	خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

وبمقارنة قيم الصواب المتقابلة للعبارتين في العمودين الخامس والأخير نجد أن للعبارتين قيم الصواب نفسها. إذن فالعبارتان متكافئتان.

وأدوات الربط المنطقي تحقق العديد من الخواص والتي يمكن برهنتها باتباع الأسلوب نفسه الذي يعتمد على علاقة التكافؤ بين العبارات. والنظرية التالية تلخص بعض الخواص لأدوات الربط المنطقي.

نظرية (١-١) إذا كانت ف، ن، هـ عبارات بسيطة فإن:

(لنرمز للتحصيل الحاصل بالحرف ص وللتناقض بالحرف ض)

أولاً: قوانين اللانمو

(١أ) ف ∨ ف ⇔ ف   (١ب) ف ∧ ف ⇔ ف

(١ج) ف ∨ ض ⇔ ف   (١د) ف ∧ ص ⇔ ف

(١هـ) ف ∨ ص ⇔ ص   (١و) ف ∧ ض ⇔ ض

ثانياً: قوانين الإبدال:

(٢أ) ف ∨ ن ⇔ ن ∨ ف   (٢ب) ف ∧ ن ⇔ ن ∧ ف

ثالثاً: قوانين التجمع

(٣أ) (ف ∨ ن) ∨ هـ ⇔ ف ∨ (ن ∨ هـ)

(٣ب) (ف ∧ ن) ∧ هـ ⇔ ف ∧ (ن ∧ هـ)

رابعاً: قوانين التوزيع:

(٤أ) ف ∨ (ن ∧ هـ) ⇔ (ف ∨ ن) ∧ (ف ∨ هـ)

(٤ب) ف ∧ (ن ∨ هـ) ⇔ (ف ∧ ن) ∨ (ف ∧ هـ)

خامساً: قوانين التتام:

(٥أ) ف ∨ (– ف) ⇔ ص   (٥ب) ف ∧ (~ ف) ⇔ ض

(٥ج) ~ (~ ف) ⇔ ف   (٥د) ~ ض ⇔ ص   (٥هـ) ~ص ⇔ ض

سادساً: قوانين دي مورجان للنفي:

(٦أ) – (ف ∨ ن) ⇔ (– ف) ∧ (– ن)

(٦ب) – (ف ∧ ن) ⇔ (– ف) ∨ (– ن)

(٦ج) – (ف ← ن) ⇔ ف ∧ (–ن)

نظرية (١-٢): العبارة الشرطية ف ← ن تكافئ العبارة الشرطية (~ ن) ←(– ف).
تسمى العبارة الشرطية (~ ن) ← (~ ف) المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية ف ← ن.

هذه النظرية أساس لإحدى طرق البرهان تسمى طريقة المعاكس الإيجابي، وسيرد ذكرها في وقت لاحق.

أمثلة على جبر العبارات

اكتب كلاً من العبارات التالية في أبسط صورة:

١. (ف ٧ ن) ٨ (~ ف)

٢. (~ (ف ٧ ن)) ٧ ((~ ف) ٨ ن)

الحل:

١. (ف ٧ ن) ٨ (~ ف) ⇔ (ف ٨ (~ ف)) ٧ (ن ٨ (~ ف))

⇔ ض ٧ (ن ٨ (~ ف))

⇔ ن ٨ (~ ف)

٢. (~(ف ٧ ن)) ٧ ((~ ف) ٨ ن) ⇔ ((~ ف) ٨ (~ ن)) ٧ ((~ ف) ٨ ن).

⇔ (~ ف) ٨ ((~ ن) ٧ن)

⇔ (~ ف) ٨ ص

⇔ ~ ف

تمارين (١ -٢)

١. **أثبت صحة كل مما يلي:**

١) {(ف ٨ ن) ← هـ} ⇔ { (ف← هـ) ٧ (ن ← هـ)}

٢) {ف ← (ن ← هـ)} ⇔ {ف ٨ (~هـ) ← (~ن)}

٣) { ~ (ف↔ ن)} ⇔{ف↔ (~ن) } ⇔ {(~ ف) ↔ ن}

٤) {ف ← ن} ⇔ {(~ ف) ٧ ن}

٢. **انف كلاً من العبارات التالية:**

١) أضلاع المعين متطابقة وزواياه متطابقة.

٢) إذا كان المثلث (أ ب ج) متطابق الساقين فإن زواياه متطابقة.

٣) إذا كان أ، ب عددين طبيعتين فرديين فإن مجموعهما ليس زوجياً.

٤) العدد ٣ أو العدد - ٣ عدد طبيعي.

٥) مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠° وقياس كل زاوية فيه ٩٠.

٦) ٣ × ١ = ٣ أو ٣ × ٠ = ٣

٧) إذا كان (أ) عدداً فردياً فإن أ^{٢} عدد فردي.

٠٣ استخدم خواص أدوات الربط في تبسيط العبارات التالية:

١) ~ (ف∨ (~ ن)).

٢) ~((~ ف) ← (~ ن)).

٣) ف ∨ ن) ∧ (~ ف)

٤) ف ∨ (ف ∧ ن).

٥) ~(ف ∨ ن) ∨ ((~ ف) ∧ ن).

(١ -٥) الجمل المفتوحة:

كل حرف أو رمز يمثل أي عنصر من عناصر مجموعة ما يسمى متغيراً، وإذا كانت س مجموعة ما، وكان ف (س) تعبيراً ما في المتغير س، بحيث تكون فـ(أ) عبارة (صحيحة أو خطأ) لكل عنصر (أ) في المجموعة س، فإن ف (س) تسمى جملة مفتوحة معرفة على المجموعة س، وتسمى المجموعة س مجموعة التعويض، ومجموعة العناصر المنتمية إلى س والتي تجعل ف (س) عبارة صحيحة تسمى مجموعة الحل، وكل عنصر فيها يسمى حل للجملة المفتوحة.

مثال(١١): لتكن س + ١ < ٣ جملة مفتوحة معرّفه على المجموعة س = {٠، ١، ٢، ٣}

لاحظ أن:

٠ + ١ < ٣ عبارة صحيحة.

١ + ١ < ٣ عبارة صحيحة.

٢ + ١ < ٣ عبارة خطأ.

٣ + ١ < ٣ عبارة خطأ

إذن كل من العددين ٠، ١ حل للجملة المفتوحة في س، وعليه فإن مجموعة الحل= {٠، ١}.

مثال (١٢): لتكن ف (س) هي الجملة المفتوحة "س عامل من عوامل العدد ١٢ حيث س عدد طبيعي" .

إن مجموعة التعويض للجملة المفتوحة هي ط (مجموعة الأعداد الطبيعية) ومجموعة الحل = {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢}.

مثال (١٣): أوجد مجموعة الحل للجملة المفتوحة:

ف (س): " س عدد طبيعي أصغر من ٢٠ و س عدد أولي" .

الحل: مجموعة الحل هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأولية الأصغر من ٢٠ وهي {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩}.

(١ -٦) العبارة المسورة:

أ) العبارة المسورة كلياً:

تصادفنا في الرياضيات عبارات مثل:

لكل عدد طبيعي أ يكون أ x ١ = أ

هذه العبارة ومثيلاتها تسمى عبارات مسورة كلياً لأنها تتضمن شرطاً يفترض تحققه من أجل جميع عناصر مجموعة ما. تكتب هذه العبارات بالرموز على النحو التالي:

∀أ ∋ ط يكون أ × ١ = أ

والرمز "∀" يقرأ لكل (أو لأي أو لجميع) وبالمثل، العبارة:

لكل عددين حقيقيين مثل أ، ب يكون أ + ب = ب + أ

تكتب بالرموز على النحو:

∀أ، ب ∋ ح يكون أ + ب = ب + أ

وبشكل عام؛ إذا كانت ف (س) جملة مفتوحة معرفة على مجموعة أ فإن

∀ س ∋ أ؛ ف (س) ... (I)

عبارة وتقرأ "لكل عنصر س في المجموعة أ تكون ف (س) عبارة صحيحة".

الرمز $\forall$ يسمى سوراً كلياً. وحتى تكون العبارة (I) صحيحة يجب أن تكون مجموعة حل الجملة المفتوحة ف (س) = أ.

أما إذا وجد عنصر واحد على الأقل في أ لا يجعل ف (س) عبارة صحيحة فإن العبارة المسودة كلياً (i) تكون خطأ، فمثلاً:

العبارة "$\forall$" س ∋ ط يكون س^{٢} > س "عبارة خطأ لأن العدد ١ ∋ ط مثلاً بينما ١^{٢} >١ عبارة خطأ.

أما العبارة "$\forall$ س ∋ ط يكون س + ١ > س" عبارة صحيحة لأن س +١ > س عبارة صحيحة مهما كانت قيمة س في ط.

ب) العبارات المسورة جزئياً:

نعلم أنه؛ إذا كانت ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية فإن:

بعض الأعداد في ط فردية.

أي أنه؛ يوجد على الأقل عدد في ط يكون فردياً ... (١).

وبعض الأعداد في ط زوجية.

أي أنه؛ يوجد على الأقل عدد في ط يكون زوجياً ... (٢)

إن كلا من العبارتين (١)، (٢) ومثيلاتهما تسمي عبارات مسورة جزئياً لأن كلاً منها تتضمن شرطاً يفترض أن يتحقق من أجل بعض عناصر مجموعة ما. يستخدم الرمز E الذي يقرأ "يوجد على الأقل" لكتابة العبارات المسورة جزئياً.

فالعبارة (١) تكتب على النحو:

E س ∋ ط بحيث يكون س عدداً فردياً.

والعبارة (٢) تكتب على النحو:

E س ∋ ط بحيث يكون س عدداً زوجياً.

وبشكل عام؛ إذا كانت ف (س) جملة مفتوحة معرفة على المجموعة أ فإن

E س ∋ أ؛ ف (س) .... (ii)

عبارة وتقرأ " يوجد على الأقل عنصر س في المجموعة أ بحيث تكون ف (س) عبارة صحيحة" والرمز E يسمى سوراً جزئياً.

وحتى تكون العبارة المسورة جزئياً (ii) صحيحة يجب أن تكون:

مجموعة حل الجملة المفتوحة ف (س) غير خالية.

أما إذا كانت جميع عناصر أ تجعل ف (س) عبارة خطأ فإن العبارة (ii) تكون خطأ.

فمثلاً: العبارة " E س ∋ ط بحيث يكون س عدداً أولياً" عبارة صحيحة لأن مجموعة حل الجملة المفتوحة " س عدد أولي" هي {٢، ٣، ٥، ٧ ...} غير خالية.

أما العبارة " E س ∋ ط بحيث يكون س + ١ = س "فهي عبارة خطأ لأن جميع الأعداد الطبيعية لا تحقق الجملة المفتوحة " س + ١=س". أي أن مجموعة حل الجملة المفتوحة "س +١ = س" مجموعة خالية.

نفي العبارات المسورة:

رأينا فيما سبق أن العبارة المسورة كلياً:

∀ س ∋ أ: فـ(س)

تكون خطأ إذا وجد على الأقل عنصر س في المجموعة أ بحيث فـ(س) تكون عبارة خطأ، وهذا يعني أن:

~ (∀ س ∋ ف (س)) تكافىء E س∋ أ: ~ فـ(س)

وبالمثل، تكون العبارة المسورة جزئياً

E س ∋ أ: فـ(س)

خطأ إذا كان لكل عنصر س في أ تكون ف (س) خطأ وهذا يعني أن:

~ (E س∋ أ: فـ(س)) تكافىء ∀ س∋ أ: ~ ف (س)

تمارين (١-٣)

١. عبر عن كل من العبارات التالية باستخدام أحد الرمزين ∀، E واذكر قيمة الصواب لها:

١) لكل عدد حقيقي أ يكون أ × صفر = صفر

٢) يوجد عدد حقيقي هـ بحيث $هـ^{٢}$ = هـ

٣) لكل عددين حقيقين أ، ب يكون أ × ب = ب × أ.

٤) لكل ثلاثة أعداد حقيقية أ، ب، ج، يكون:

أ × (ب + ج) = أ × ب+ أ × ج

٥) يوجد عدد طبيعي ن بحيث ن + ٢ < ٧ .

٦) يوجد مثلث قائم الزاوية.

٠٢ ما قيمة الصواب لكل عبارة مما يلي:

١) يوجد عدد طبيعي زوجي يكون أولياً.

٢) E ن ∋ ط بحيث ن + ٥ < ٤

٣) لكل عدد صحيح س يكون س ٢ < صفر.

٤) ∀أ ∋ ح يكون أ + صفر = أ.

٥) يوجد مثلث إحدى زواياه منفرجة.

٦) كل مستطيل تكون زواياه قوائم.

٧) ∀أ ∋ ح يكون أ^{٢} أ.

٨) ∀ أ، ب، ج ∋ ح يكون: أ × (ب X ج) = (أ × ب) × ج

٠٣ انف كل عبارة مما يلي:

١) كل عدد صحيح يكون موجباً.

٢) يوجد مثلث متساوي الساقين.

٣) ∀ س، ص ∋ ح يكون س – ص = ص –س.

٤) E س ∋ ط بحيث يكون س + ١ = ١ .

٥) جميع المستطيلات تكون مربعات.

الوحدة الثانية

المجموعـــات

(١-٢) المجموعة والعنصر:

ظهر مفهوم المجموعة كأحد المفاهيم الموحّدة لفروع الرياضيات، وأي عدد من الأشياء المحددة (التي لا يمكن الخلط بينها) والمتمايزة (التي يمكن التمييز بينها وبين غيرها) تشكل مجموعة، ويرمز للمجموعة بحرف من حروف الهجاء الكبيرة أ، ب، ج، س، ص، ...

كما تسمى الأشياء المكونة للمجموعة عناصر المجموعة ويرمز لها بحروف الهجاء الصغيرة أ، ب، ج، س، ص، ... وإذا كان أ عنصراً في المجموعة أ فإننا نعبر عن ذلك بالرمز كما يلي:

أ ∋ أ

وتقرأ " أ عنصر في المجموعة أ؛ أو "أ ينتمي إلى المجموعة أ".

أما إذا كان أ لا ينتمي إلى المجموعة أ فإننا نكتب: أ ∌ أ.

وتكتب المجموعة بطريقتين رئيسيتين: الأولى، كتابة عناصر المجموعة - إن كان ذلك ممكنا - بين الحاصرتين { } مع وضع فاصلة بين كل عنصرين ودون أهمية للترتيب وبدون تكرار. والطريقة الثانية بذكر الخواص التي تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر. فمثلا:

مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي أقل من ١٠ تكتب بالطريقتين السابقتين كما يلي:

أ = { ١، ٣، ٥، ٧، ٩}

أو أ = {س: س ∋ ط، س عدد فردي أقل من ١٠} وتقرأ هذه المجموعة كما يلي:

مجموعة العناصر س حيث س عدد طبيعي فردي أقل من ١٠، والنقطتان": " تقرآن "حيث" والفاصلة "،" تقرأ "و".

مثال: لتكن س هي "مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة الأقل من ١٠٠" تكتب المجموعة س كما يلي :

س= {.، ٢، ٣، ٤، ... ٩٩} حيث تشير النقط " ... " إلى الاستمرارية في كتابة العناصر حسب النمط السابق لها حتى العدد ٩٩. أو س = {أ : أ ∋ ص، صفر ≥ أ ≥٩٩} حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة.

لاحظ أن -٣ ∉ س، ١١ ∈ س، ٢١٧ ∉ س، ١٠٠ ∉ س.

مثال (٢): إذا كانت ع هي " مجموعة الأرقام الداخلة في كتابة العدد ٧١١٢٥ " فإن:

ع = {٧، ٥، ٢، ١} أو ع = {و : ورقم من أرقام العدد ٧١١٢٥}

لاحظ أن، ٣ ∉ ع، ٥ ∈ ع، ٨ ∉ ع.

تساوي مجموعتين: إذا كانت المجموعتان أ، ب مكونتين من العناصر نفسها، أي إن كل عنصر في أ ينتمي إلى ب وكل عنصر في ب ينتمي إلى أ، فإننا نقول إن المجموعة أ تساوي المجموعة ب ونكتب ذلك اختصاراً:

أ = ب

ونفي هذه العبارة يكتب أ ≠ ب وتقرأ "أ لا تساوي ب"

مثال: لتكن أ = {١، ٢، ٣، ٦}، ب = {٦، ١، ٢، ١، ٣}

ج = {س: س ∈ ط ، س عامل من عوامل العدد ٦}.

إن أ = ب = ج لأنها مكونة من العناصر نفسها، لاحظ أن المجموعة لا تتغير إذا تغير ترتيب عناصرها بين الحاصرتين أو كررت بعض العناصر.

(٢ - ٢) المجموعات المنتهية وغير المنتهية

تكون المجموعة منتهية إذا كان بها ن من العناصر المختلفة، حيث ن عدد صحيح غير سالب، عدا ذلك تكون غير منتهية فمثلاً:

مجموعة الأعداد الطبيعية ط = {١، ٢، ٣، ٤، ...} ومجموعة الأعداد الصحيحة

ص = {...، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ...} مجموعتان غير منتهيتين، أما مجموعة الأرقام

أ = {٠، ١، ٢، ٣، ....، ٩} ومجموعة أيام الأسبوع ب = {سبت، أحد، اثنين، ثلاثاء، أربعاء، خميس، جمعة} مجموعتان منتهيتان.

(٢ - ٣) المجموعات الجزئية

تكون مجموعة أ مجموعة جزئية من (أو محتواه في) مجموعة ب، وبالرموز أ⊆ ب إذا وفقط إذا كان كل عنصر في أ ينتمي إلى ب، أي:

س ∈ أ ← س ∈ ب حيث يقرأ الرمز " ← " يحتم

أما إذا وجد عنصر على الأقل في أ ولا ينتمي إلى ب، فإن أ لا تكون محتواه في (أو ليست مجموعة جزئية من) المجموعة ب، وبالرموز نكتب:

أ $\not\supseteq$ ب

مثال (٤): لتكن أ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩} ب = {٢، ٣، ٥، ٧}

ج = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

إنّ أ $\not\supseteq$ ج لأن ٩ $\ni$ أ بينما ٩ $\not\ni$ ج، لكن ب $\supseteq$ ج لأن كل عنصر في ب ينتمي إلى ج.

لاحظ أن تعريف أ $\supseteq$ ب لا يستبعد أن تكون أ = ب

نتيجة (١): $\forall$ مجموعة أ تكون أ $\supseteq$ أ

وهذه النتيجة تمكننا من إعادة صياغة تساوي مجموعتين كما يلي:

تعريف (١): لأي مجموعتين أ، ب تكون أ = ب إذا وفقط إذا كانت أ $\supseteq$ ب Λ ب $\supseteq$ أ

نتيجة (٢): لتكن أ، ب، ج ثلاث مجموعات.

إذا كانت أ $\supseteq$ ب Λ ب $\supseteq$ ج فإن أ $\supseteq$ ج

(٢-٤) المجموعة الخالية والمجموعة الشاملة:

المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى مجموعة خالية ويرمز لها بالرمز Φ (ويقرأ فاي) أي أن Φ = { }.

فمثلاً، مجموعة الأعداد الصحيحة التي مربعها ٣ هي مجموعة خالية لأنه لا يوجد أي عدد صحيح مربعه يساوي ٣ .

ومجموعة حل الجملة المفتوحة ٢س = ١ في ط هي مجموعة خالية لأنه لا يوجد عدد طبيعي يجعل ٢ س = ١ عبارة صحيحة.

وفي بعض مسائل المجموعات، قد نحتاج مجموعة تحتوي على كافة المجموعات كمجموعات جزئية منها، هذه المجموعة تسمى المجموعة الشاملة أو الكلية وسنرمز لها بالرمز ش فمثلاً:

إذا كانت أ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩} ب = {٢، ٣، ٥، ٧}، ج {١، ٢، ٤، ٨}

فإن أياً من المجموعات التالية تصلح كمجموعة شاملة:

$ش_1$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

$ش_2$ = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

$ش_3$ { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧، ٨، ٩}

$ش_4$= ط ... وهكذا

لاحظ أن المجموعة الشاملة ليست وحيدة. ولذلك عند الحاجة إليها في مسألة ما يشار إليها في نص المسألة.

ملاحظة: إذا كانت ش هي مجموعة شاملة وكانت أ مجموعة ما فإن أ ⊆ ش

نتيجة (٣): لكل مجموعة مثل أ تكون Φ ⊆ أ .

مثال (٥): لتكن س = {أ، ب، ج}. المجموعات الجزئية للمجموعة س هي:

Φ، {أ}، {ب}، {ج}، {أ، ب}، {أ،ج}، {ب، ج}، س

والمجموعة المكونة من هذه المجموعات الجزئية تسمى مجموعة القوة للمجموعة س ويرمز لها بالرمز ق (س) أي أن:

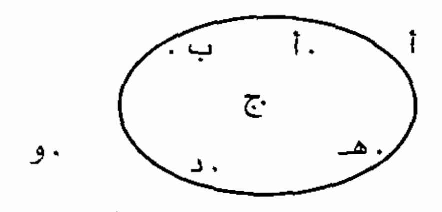
ق(س) = {Φ، {أ}، {ب}، {ج}، {أ، ب } , {أ، ج}، {ب، ج}، س}

لاحظ أن: كل عنصر في ق (س) هو مجموعة جزئية من س، وكل مجموعة جزئية من س هي عنصر في ق (س).

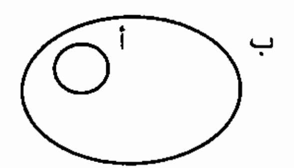
(٢ - ٥) أشكال فن:

اقترح العالم فن طريقة سهلة لتمثيل المجموعات بالرسم، وأطلق على هذه الرسوم أشكال فن، فلتمثيل مجموعة ما نرسم أي منحنى مغلق بسيط ونكتب عناصر المجموعة داخلة، والعناصر التي لا تنتمي للمجموعةتكتب خارجه، فمثلا:

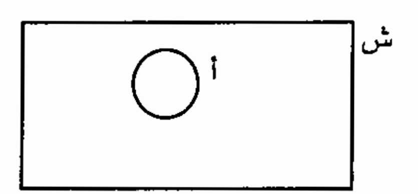
إذا كانت أ = {أ، ب، ج، د، هـ } فإن شكل فن الذي يمثلها هو:



لاحظ أن عناصر أ كتبت داخل المنحنى بينما العنصر والذي لا ينتمي إلى أ كتب خارج المنحنى. وإذا كانت أ $\subseteq$ ب فإن شكل فن الذي يمثل المجموعتين أ، ب هو:



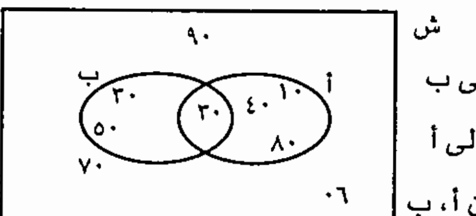
وسنميز المجموعة الشاملة عن المجموعات الأخرى بتمثيلها كما يلي:



مثال (٦): لتكن ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} هي المجموعة الشاملة ولتكن أ = {١، ٢، ٤، ٨}، ب = {٢، ٣، ٥} .

مثل هذه المجموعات بشكل فن.

الحل: الشكل المجاور هو شكل فن الذي يمثل المجموعات ش، أ، ب لاحظ أن:



* العنصر ٢ ينتمي للمجموعتين أ، ب
* العناصر ٨، ٤، ١، تنتمي إلى أ و لا تنتمي إلى ب
* العنصرين ٥، ٣ ينتميان إلى ب ولا ينتميان إلى أ
* العناصر ٦،٧،٩ لا تنتمي لأي من المجموعتين أ، ب

العبارات المسورة والمجموعتين الخالية والشاملة:

لتكن ف (س) جملة مفتوحة معرفة على مجموعة أ، نعلم أن العبارة المسورة كلياً:

" $\forall$ س $\ni$ أ : ف (س) " تكون صحيحة إذا كان كل عنصر في أ حلا للجملة المفتوحة ف (س)، أي إذا كانت مجموعة الحل أ.

وتكون خطأ إذا وجد عنصر على الأقل في أ لا يكون حلا للجملة المفتوحة ف (س) أي إذا كانت مجموعة الحل $\neq$ أ.

أما العبارة المسورة جزئيا، " E س $\ni$ أ : ف (س) " فتكون صحيحة إذا وجد على الأقل عنصر في أ يكون حلا للجملة المفتوحة، أي إذا كانت مجموعة الحل $\neq \Phi$.

وتكون خطأ إذا كان كل عنصر في أ ليس حلا للجملة المفتوحة ف (س)، أي إذا كانت مجموعة الحل = Φ

تمارين (٢ - ١)

١. اكتب كلا من المجموعات التالية بذكر عناصرها وباستخدام الصفة المميزة:

١) مجموعة الأرقام المكونة للعدد ٣٠٥١٠ .

٢) مجموعة العوامل الموجبة للعدد ٢٤ .

٣) مجموعة الأعداد الطبيعية الأولية الأصغر من ٢٠ .

٤) مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية الأقل من أو تساوي ١٠٠ .

٥) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية .

٦) مجموعة حل الجملة المفتوحة: س^{٢} + ١ = صفر حيث س $\in$ ح .

٧) مجموعة حل الجملة المفتوحة، ٢ س + ١ < ١٠ حيث س $\in$ ط.

٢. لتكن أ = {٢، {٣}، {٥، ٤}} . ما قيمة الصواب لكل عبارة مما يلي:

١) ٢ $\in$ أ		٢) ٣ $\in$ أ

٣) ٤ $\in$ أ		٤) {٣} $\in$ أ

٥) {٤} $\subseteq$ أ		٦) {٣} $\subseteq$ أ

٧) {٥، ٤} $\subseteq$ أ		٨) {٣، ٢} $\subseteq$ أ

٩) $\Phi \subseteq$ أ		١٠) {٥، ٤، ٣، ٢} = أ

٣. لتكن ش = {أ، ب، ج، د، هـ، و، ل، م} هي المجموعة الشاملة.

ولتكن أ = {أ، ج، م، د}، ب = {ب، ج، د، و}

أ. اكتب كلا من المجموعات التالية:

١) مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى أ.

٢) مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى ب .

٣) مجموعة العناصر التي تنتمي إلى أ ولا تنتمي إلى ب .

٤) مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ب ولا تنتمي إلى أ .

٥) مجموعة العناصر المشتركة بين أ، ب .

ب. ارسم شكل فن يمثل المجموعات ش، أ، ب.

٤. اكتب مجموعة القوة للمجموعة أ = { ١، ٢، ٣}

٥. برهن ما يلي:

١) إذا كانت أ⊇ ب، ب ⊇ ج فإن أ ⊇ ج.

٢) إذا كانت أ ⊇ Φ. فإن أ = Φ

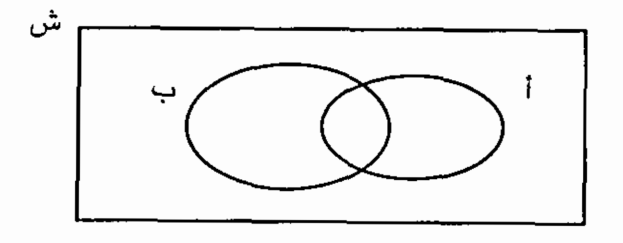
٣) لكل مجموعة أ تكون Φ ⊇ أ.

(٢ - ٦) العمليات على المجموعات

أولاً: عملية الاتحاد ورمزها "∪"

يعرف اتحاد مجموعتين على أنه مجموعة تضم عناصر المجموعتين معاً. فإذا كانت أ، ب مجموعتين فإن اتحادهما هو مجموعة كافة العناصر التي تنتمي إلى أ أو إلى ب أو لكليهما، وإذا رمزنا لاتحاد المجموعتين أ، ب بالرمز أ ∪ ب فإن أ ∪ ب = {س: س ∋ أ V س ∋ ب }

والجزء المظلل في شكل فين التالي يمثل أ ∪ ب .



ومن هذا التعريف نستنتج أن :

١. أ ∪ ب = ب ∪ أ أي أن عملية الاتحاد إبدالية .

٢. أ ⊇ أ ∪ ب، ب ⊇ أ ∪ ب

٣. أ ∪ أ = أ

٤. أ ∪ Φ = أ أي أن Φ عنصر محايد لعملية الاتحاد .

٥. أ ∪ ش = ش

مثال (٧): إذا كانت ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} هي المجموعة الشاملة، وكانت أ = {١، ٢، ٣، ٤}، ب = {٢، ٤، ٦، ٨}،

ج = {٣، ٤، ٥، ٦، ٩}.

فإن:

١. أ ∪ ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٨.}

٢. ب ∪ أ = {٢،٤، ٦، ٨، ١، ٣} (لاحظ أن أ ∪ ب= ب ∪ أ)

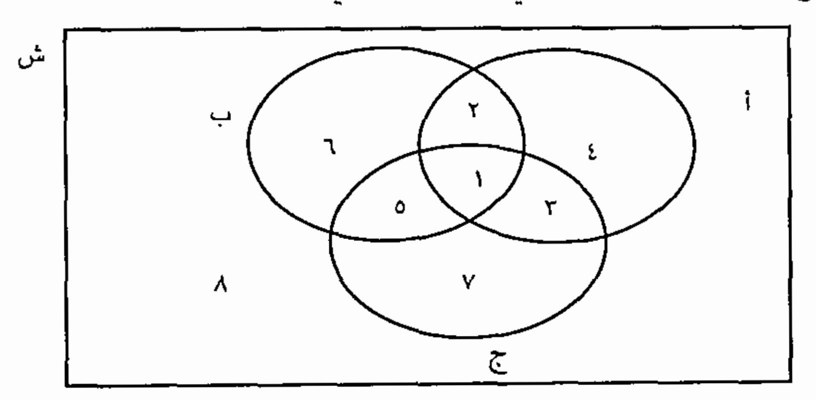
٣. أ ∪ (ج ∪ب) = أ ∪ { ٣ , ٤ , ٥ , ٦ , ٩، ٢، ٨} = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٩، ٨}

٤. (أ ∪ ج) ∪ ب= { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٩، } ∪ ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٩، ٨}

لاحظ أن أ ∪ (ج ∪ ب) =(أ ∪ ج) ∪ ب

ويمكن إثبات خواص العمليات على المجموعات بجداول تشبه جداول الصواب للعبارات في المنطق وتسمى في حالة المجموعات جداول الانتماء.

فإذا رمزنا لانتماء عنصر لمجموعة بالرمز ١، ولعدم انتمائه للمجموعة بالرمز "●" وكانت أ، ب، ج ثلاث مجموعات كما في شكل فن التالي:



فإن وجود عنصر في أي من المناطق الثمانية المشار إليها في شكل فن يمثلها الجدول التالي:

أ	ب	ج
١	١	١
١	١	٠
١	٠	١
١	٠	٠
٠	١	١
٠	١	٠
٠	٠	١
٠	٠	٠

← هذه الحالة مثلاً تعني أن العنصر ينتمي إلى أ وينتمي إلى ب ولا ينتمي إلى ج (المنطقة ٢)

لاحظ التشابه بين هذا الجدول وجدول الصواب لثلاث عبارات، حيث يناظر الرمز ١ القيمة ص والرمز ● القيمة خ.

مثال (٨): أثبت باستخدام جدول الانتماء أنه:

∀ ثلاث مجموعات أ، ب، ج يكون أ ∪ (ب ∪ ج) = أ ∪ ب) ∪ ج

الحل: تذكر أنه:

يكون س ∋ أ ∪ ب إذا وفقط إذا كان س ∋ أ V س ∋ ب

أي إذا وفقط إذا كان س ينتمي لمجموعة على الأقل من أ ، ب

إن قيم الانتماء للمجموعتين أ ∪ (ب ∪ج) ، (أ ∪ب) ∪ ج مبينة في الجدول التالي:

أ	ب	ج	ب∪ج	أ∪ (ب∪ج)	أ ∪ ب	(أ ∪ب) ∪ ج
١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	١	١
١	٠	١	١	١	١	١
١	٠	٠	٠	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١
٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	١	١	٠	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبمقارنة قيم الانتماء للمجموعتين أ ∪ (ب∪ج)، (أ∪ب) ∪ ج في العمودين الخامس والأخير نجد أنها متناظرة، أي أنه، إذا كان العنصر منتمياً للأولى فإنه منتمياً للثانية، وإذا كان منتمياً للثانية فإنه يكون منتمياً للأولى.

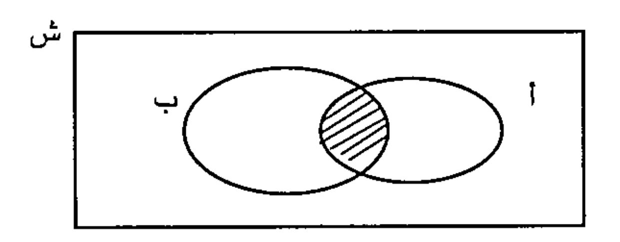
∴ أ ∪ (ب∪ج) = (أ ∪ب) ∪ ج

أي أن عملية الاتحاد على المجموعات تجميعية

ثانياً : عملية التقاطع ورمزها "∩"

يعرف تقاطع مجموعتين على أنه مجموعة تضم العناصر المشتركة بين المجموعتين، فإذا كانت أ، ب مجموعتين فإن تقاطعهما - ورمزه أ ∩ ب ويقرأ أ تقاطع ب - هو مجموعة كافة العناصر التي تنتمي إلى أ وتنتمي إلى ب، أي أن أ ∩ ب = {س: س ∈ أ ∧ س ∈ ب }

والجزء المظلل في شكل فن التالي يمثل أ ∩ ب.



ومن هذا التعريف نستنتج أن:

١ . أ ∩ ب = ب ∩ أ أي أن عملية التقاطع إبدالية.

٢ . أ ∩ ب ⊆ أ ، أ ∩ ب ⊆ ب

٣. أ ∩ أ = أ

٤. أ ∩Φ = Φ

٥. أ ∩ ش = أ أي أن ش عنصر محايد لعملية التقاطع.

ملاحظة : إذا كان أ ∩ ب = Φ فإننا نسمي أ ، ب مجموعتين منفصلتين.

مثال (٩) : إذا كانت ش = {س، ص ، ل ، م ، هـ ، و ، ن} هي المجموعة الشاملة وكانت أ = {س، ل، هـ، ن} ، ب = {ص، ل ، م ، هـ } ، ج = {م ، هـ ، و}

فإن :

١. أ ∩ ب = {ل،هـ}

٢. أ∩ (ب∩ج) = أ ∩ {م،هـ} = {هـ}

٣. (أ∩ب) ∩ ج = {ل،هـ} ∩ ج = {هـ}

لاحظ أن أ ∩ (ب ∩ج) = (أ∩ب) ∩ ج أي أن عملية التقاطع على المجموعات تجميعية.

٤. أ ∩ (ب ∪ ج) = أ ∩ {ص،ل،م،هـ، و} = {ل ، هـ}

٥. (أ ∩ ب) ∪ (أ∩ ج) = {ل،هـ} ∪ {هـ} = {ل،هـ}

لاحظ أن أ ∩ (ب ∪ ج) = (أ ∩ ب) ∪ (أ∩ ج)

مثال (١٠): اثبت باستخدام جداول الانتماء أنه ∀ ثلاث مجموعات أ، ب ، ج يكون

أ∩ (ب∪ ج) = (أ ∩ب) ∪ (أ ∩ ج)

الحل: تذكر أنه:

يكون س ∋ أ ∩ ب إذا وفقط إذا كان س ∋ أ ∧ س ∋ ب

أي إذا وفقط إذا كان س ينتمي لكل من المجموعتين أ ، ب

إن قيم الانتماء للمجموعتين أ ∩ (ب ∪ج) ، (أ∩ب) ∪ (أ ∩ ج) مبينة في الجدول التالي:

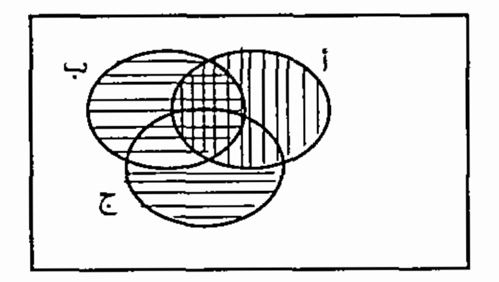
أ	ب	ج	ب ∪ ج	أ ∩ (ب ∪ ج)	أ ∩ب	أ ∩ج	(أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج)
١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	١	٠	١
١	٠	١	١	١	٠	١	١
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبمقارنة قيم الانتماء للمجموعتين أ ∩ (ب∪ ج) ، (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج) في العمودين الخامس والأخير نجد أنها متناظرة.

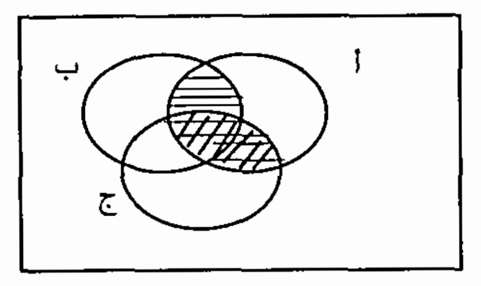
∴ أ ∩ (ب∪ ج) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج)

أي أن عملية التقاطع تتوزع على عملية الاتحاد.

وتستخدم أشكال فن لتوضيح تساوي مجموعتين. فإذا أردنا توضيح أن المجموعتين أ ∩ (ب∪ ج) = (أ ∩ب) ∪ (أ ∩ ج) متساويتان نرسم شكلين متطابقين ونظلل على الشكل الأول المنطقة التي تمثل المجموعة الأولى وعلى الشكل الثاني المنطقة التي تمثل المجموعة الثانية، فإذا كانتا متناظرتين فإن المجموعتين متساويتان، كما في الشكلين التاليين:



نظلل ب ∪ ج أفقياً ونظلل أ راسياً فتكون أ ∩ (ب ∪ ج) هي المنطقة التي ظللت مرتين



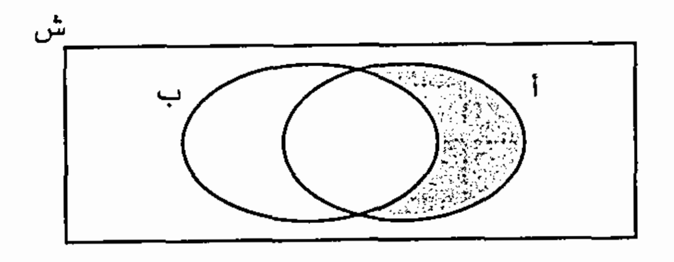
نظلل أ ∩ ب افقياً ونظلل أ ∩ ج راسياً فتكون (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج) هي المنطقة المظللة كلها.

ثالثا : عملية الفرق ورمزها "/"

يعرف الفرق بين مجموعتين أ ، ب - ورمزه أ/ب ويقرأ أ عدا ب - على أنه مجموعة تضم العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أ ولا تنتمي إلى المجموعة الثانية ب، أي أن

أ/ب = { س : س ∋ أ Λ س ∌ ب}

والجزء المظلل في شكل فن التالي يمثل أ / ب:



ومن هذا التعريف نستنتج أن:

١) أ / ب ≠ ب / أ أي أن عملية الفرق ليست إبدالية.

٢) أ/ب ⊇ أ

٣) أ / Φ = أ

٤) أ / أ = Φ

٥) المجموعات أ/ب، أ∩ب، ب/أ منفصلة مثنى، أي أن تقاطع أي مجموعتين منها يساوي Φ.

مثال (١١) : إذا كانت ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} هي المجموعة الشاملة.

وكانت أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}، ب = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

ج = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} فإن:

١) أ/ب = {١ ، ٣}

٢) ب / أ = {٦ ، ٨} (لاحظ أن أ / ب ≠ ب/أ)

٣) ش / ج = {١ ، ٢ ، ٨ ، ٩} وتوصف المجموعة ش / ج على أنها مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى ج.

٤) أ/ (ب∩ج) = أ / {٤ ، ٦} = {١ ، ٢ ، ٣}

٥) (أ/ب) ∪ (أ/ج) = {١ ، ٣} ∪ {١ ، ٢} = {١ ، ٢ ، ٣}

لاحظ أن : أ/(ب ∩ج) = (أ/ب)∪ (أ/ج)

٦) أ/ (ب/ج) = أ / {٢ ، ٨} = {١ ، ٣ ، ٤}

٧) (أ/ب) /ج = {١ ، ٣} / ج = {١}

لاحظ أن أ / (ب/ج) ≠ (أ / ب) / ج

أي أن عملية الفرق ليست تجميعية

مثال (١٢) : أثبت باستخدام جداول الانتماء أنه:

∀ ثلاث مجموعات أ، ب ، ج تكون أ / (ب ∩ ج) = (أ/ب) ∪ (أ / ج)

الحل : تذكر أنه:

يكون س ∋ أ/ب إذا وفقط إذا كان س ∋ أ Λ س ∌ ب

أي إذا وفقط إذا كان س ينتمي إلى المجموعة الأولى ولا ينتمي إلى المجموعة الثانية.

إن قيم الانتماء للمجموعتين أ/ (ب∩ج) ، (أ/ب) ∪ (أ/ج) مبينة في الجدول التالي:

أ	ب	ج	ب ∩ ج	أ/ (ب∩ج)	أ/ب	أ/ج	(أ/ب) ∪ (أ/ج)
١	١	١	١	٠	٠	٠	٠
١	١	٠	٠	١	٠	١	١
١	٠	١	٠	١	١	٠	١
١	٠	٠	٠	١	١	١	١
٠	١	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبمقارنة قيم الانتماء للمجموعتين أ / (ب∩ج) ، (أ /ب) ∪ (أ/ج) في العمودين الخامس والأخير نجد أنها متناظرة.

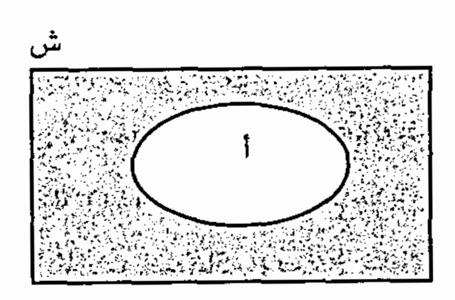
∴ أ/ (ب∩ج) = (أ/ب) ∪ (أ/ج)

رابعاً : متممة المجموعة

تعرف متممة مجموعة ما أ على أنها مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى أ . ويرمز لمتممة المجموعة أ بالرمز $\overline{أ}$ ويقرأ متممة أ . وإذا كانت ش هي المجموعة الشاملة فإن:

$\overline{أ}$ = ش/أ = {س : س ∌ أ}

والجزء المظلل في شكل فن التالي يمثل $\overline{أ}$،



ومن هذا التعريف نستنتج أن:

١. أ ∩ $\overline{أ}$ = ϕ

أي أن أ ، $\overline{أ}$ مجموعتان منفصلتان.

٢. أ ∪ $\overline{أ}$ = ش

٣. $\overline{\Phi}$ = ش / ش = ϕ = ش

٤. $\overline{ش}$ = ش/ش = Φ

مثال (١٣): إذا كانت ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} هي المجموعة الشاملة.

وكانت أ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩} ، ب = {٢، ٣، ٥، ٧} فإن:

١) $\overline{أ}$ = {٢، ٤، ٦، ٨}

٢) $\overline{ب}$ = {١، ٤، ٦، ٨، ٩}

٣) $\overline{أ} \cap \overline{ب}$ = {٤، ٦، ٨}

٤) أ $\cup$ ب = {١، ٢، ٣، ٥، ٧، ٩}

ومنها $\overline{أ \cup ب}$ = {٤ ، ٦ ، ٨}

لاحظ أن $\overline{أ \cup ب} = \overline{أ} \cap \overline{ب}$

٥) أ $\cap$ ب = {٣ ، ٥ ، ٧}

ومنها $\overline{أ \cap ب}$ = {١، ٢، ٤، ٦، ٨، ٩}

٦) $\overline{أ} \cup \overline{ب}$ = {١، ٢، ٤، ٦، ٨، ٩}

لاحظ أن $\overline{أ \cap ب} = \overline{أ} \cup \overline{ب}$

تسمى النتيجتان :

$\overline{أ \cup ب} = \overline{أ} \cap \overline{ب}$ ، $\overline{أ \cap ب} = \overline{أ} \cup \overline{ب}$

قانوناً دي مورجان للمتممة.

مثال (١٤) : أثبت باستخدام جداول الانتماء أنه:

$\forall$ مجموعتين أ ، ب يكون $\overline{أ \cup ب} = \overline{أ} \cap \overline{ب}$

الحل : تذكر أنه،

يكون س $\in \overline{أ}$ إذا وفقط إذا كان س $\notin$ أ

إن قيم الانتماء للمجموعتين $\overline{أ \cup ب}$ ، $\overline{أ} \cap \overline{ب}$ مبينة في الجدول التالي:

أ	ب	$\text{أ} \cup \text{ب}$	$\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$	$\overline{\text{أ}}$	$\overline{\text{ب}}$	$\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$
١	١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	٠	١	٠
٠	١	١	٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	١	١	١	١

وبمقارنة قيم الانتماء للمجموعتين $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$ ، $\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$ في العمودين الرابع والأخير نجد أنها متناظرة.

$$\therefore \overline{\text{أ} \cup \text{ب}} = \overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$$

وفي الجدول التالي ملخص لخواص العمليات على المجموعات

خواص اللانمو

(١أ) $\text{أ} \cup \text{أ} = \text{أ}$ (١ب) $\text{أ} \cap \text{أ} = \text{أ}$

خواص اللأبدال

(٢أ) $\text{أ} \cup \text{ب} = \text{ب} \cup \text{أ}$ (٢ب) $\text{أ} \cap \text{ب} = \text{ب} \cap \text{أ}$

خواص التجميع

(٣أ) $\text{أ} \cup (\text{ب} \cup \text{ج}) = (\text{أ} \cup \text{ب}) \cup \text{ج}$

(٣ب) $\text{أ} \cap (\text{ب} \cap \text{ج}) = (\text{أ} \cap \text{ب}) \cap \text{ج}$

خواص التوزيع

(٤أ) $\text{أ} \cup (\text{ب} \cap \text{ج}) = (\text{أ} \cup \text{ب}) \cap (\text{أ} \cup \text{ج})$

(٤ب) $\text{أ} \cap (\text{ب} \cup \text{ج}) = (\text{أ} \cap \text{ب}) \cup ((\text{أ} \cap \text{ج})$

خواص الوحدة

(٥أ) $\text{أ} \cup \phi = \text{أ}$ (٥ب) $\text{أ} \cap \text{ش} = \text{أ}$

(٦أ) $\text{أ} \cup \text{ش} = \text{ش}$ (٦ب) $\text{أ} \cap \phi = \phi$

خواص المتممة

(٧أ) $أ \cup \overline{أ} = ش$ (٧ب) $أ \cap \overline{أ} = \Phi$

(٨أ) $\overline{\overline{أ}} = أ$ (٨ ب) $\overline{ش} = \phi$ ، $\overline{\phi} = ش$

قانونا دي مورجان

(٩أ) $\overline{أ \cup ب} = \overline{أ} \cap \overline{ب}$ (٩ب) $\overline{أ \cap ب} = \overline{أ} \cup \overline{ب}$

ومن الممكن استخدام هذه الخواص والتعريفات السابقة في إثبات صحة بعض العبارات.

مثال (١٥): أثبت أن أ/ب = أ $\cap$ $\overline{ب}$ لكل مجموعتين أ ، ب

البرهان: أ / ب = {س : س $\in$ أ $\wedge$ س $\notin$ ب }

= { س : س $\in$ أ $\wedge$ س $\in$ $\overline{ب}$ }

= أ $\cap$ $\overline{ب}$

مثال (١٦): أثبت أنه، إذا كانت أ $\subseteq$ ب فإن $\overline{ب} \subseteq \overline{أ}$

البرهان : بما أن أ $\subseteq$ ب فإن: س $\in$ أ $\Leftarrow$ س $\in$ ب

وهذه تكافىء س $\notin$ ب $\Leftarrow$ س $\notin$ أ

أي أن س $\in$ $\overline{ب}$ $\Leftarrow$ س $\in$ $\overline{أ}$

$\therefore$ $\overline{ب} \subseteq \overline{أ}$

مثال (١٧) : أثبت أن $\overline{أ \cup ب} = \overline{أ} \cap \overline{ب}$

البرهان : $\overline{أ \cup ب}$ = {س : س $\notin$ أ $\cup$ ب}

= {س : س $\notin$ أ $\wedge$ س $\notin$ ب}

= {س : س $\in$ $\overline{أ}$ $\wedge$ س $\in$ $\overline{ب}$ }

= $\overline{أ} \cap \overline{ب}$

مثال (١٨) : أثبت أن أ $\cap$ (ب $\cup$ ج) = (أ $\cap$ ب) $\cup$ (أ $\cap$ ج)

البرهان: أ $\cap$ (ب $\cup$ ج) = { س : س $\in$ أ $\wedge$ س $\in$ (ب $\cup$ ج)}

= {س : س ∈ أ ∧ (س ∈ ب ∨ س ∈ ج) }

= {س : (س ∈ أ ∧ س ∈ ب) ∨ (س ∈ أ ∧ س ∈ ج) }

= { س : (س ∈ أ ∩ ب) ∨ (س ∈ أ ∩ ج) }

= (أ∩ب) ∪ (أ ∩ ج)

مثال (١٩) : أثبت أنه إذا كانت أ ⊇ ب فإن أ ∪ (ب/أ) = ب

البرهان : أ ∪ (ب/أ) = أ ∪ (ب ∩ أ̅)

= (أ ∪ ب) ∩(أ ∪ أ̅)

= ب ∩ ش = ب

مثال (٢٠) : أثبت أن أ ∩ (ب/ج) = (أ ∩ ب) / (أ ∩ ج)

البرهان: أ ∩ (ب/ج) = {س : س ∈ أ ∧ س ∈ ب/ج }

= { س : س ∈ أ ∧ (س ∈ ب ∧ س ∉ ج) }

= { س:(س ∈ أ ∧ س ∈ ب) ∧ (س ∈ أ ∧ س ∉ ج)}

= {س : س ∈ أ ∩ ب ∧ (س ∈ أ ∧ س ∉ ج }

= {س : س ∈ أ ∩ ب ∧ س ∉ أ ∩ ج }

= (أ ∩ ب) / (أ ∩ ج).

تمارين (٢ - ٢)

١. لتكن ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} هي المجموعة الشاملة

ولتكن أ = {١، ٢، ٤} ، ب {٢، ٤، ٥} ، ج = {٢ ، ٣ ، ٥}

اكتب كلا من المجموعات التالية بذكر عناصرها:

١) أ ∪ ب　　　　٢) أ ∩ ج

٣) ب / ج　　　　٤) أ ∩ ب

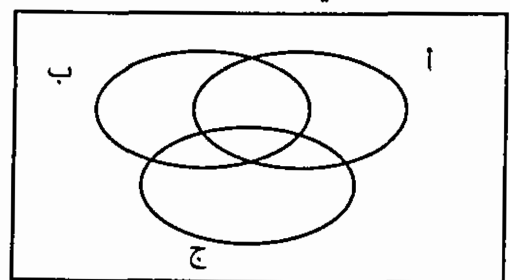
٥) ب ∪ ج̅　　　　٦) أ / ج̅

٧) (ب ∩ ج)̅　　　　٨) أ ∩ (ب ∪ ج)

٩) (أ ∪ ب) / ج　　　　١٠) أ ∪ (ب/ج)

١١) (أ ∪ ب) / ج　　　　١٢) $\overline{(\text{أ/ج})}$

٢. في شكل فن كالتالي، ظلل المنطقة التي تمثل كلاً مما يلي:-



١. أ ∩ (ب ∪ ج)

٢. (أ ∩ ب) ∪ $\overline{\text{ج}}$

٣. أ / (ب ∪ ج)

٤. أ ∩ (ب/ج)

٣. باستخدام جداول الانتماء. اثبت كلا مما يلي:

١) أ ∩ (ب ∩ ج) = (أ ∩ ب) ∩ ج

٢) أ ∪ (ب ∩ ج) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ ج)

٣) أ/ (ب ∪ ج) = (أ/ب) ∩ (أ / ج)

٤) $\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$ = $\overline{\text{أ}}$ ∪ $\overline{\text{ب}}$

٤. برهن ما يلي:

١) إذا كان أ ∩ ب = φ فإن أ ⊆ $\overline{\text{ب}}$

٢) أ / ب ⊆ $\overline{\text{ب}}$

٣) (أ/ب) ∩ ب = φ

٤) إذا كان أ ⊆ ب فإن أ ∩ $\overline{\text{ب}}$ = φ

٥) إذا كان أ ⊆ ب ، ب ⊆ ج فإن أ ⊆ ج



الوحدة الثالثة

العلاقات والاقترانات



(٣ - ١) الزوج المرتب

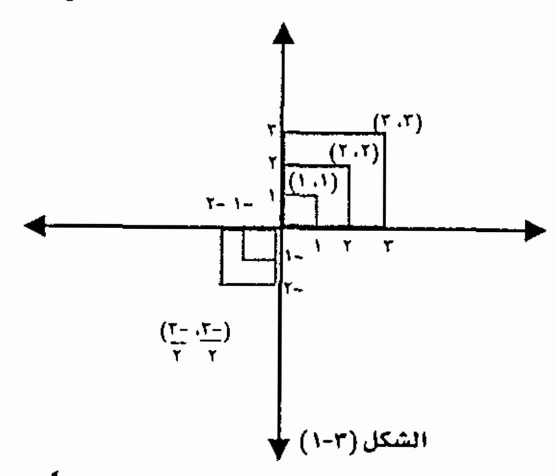
يتكون الزوج المرتب من عنصرين اثنين أ ، ب بحيث يشار لأحدهما - وليكن أ - على أنه العنصر الأول ويشار للآخر على أنه العنصر الثاني. ويكتب مثل هذا الزوج المرتب على النحو (أ،ب). والعنصر الأول أ يسمى المسقط الأول أو المركبة الأولى للزوج المرتب، أما العنصر الثاني ب فيسمى المسقط الثاني أو المركبة الثانية للزوج المرتب.

تساوي زوجان مرتبان:

يكون الزوجان المرتبان (أ،ب) ، (ج،د) متساويين إذا تساوت المساقط المتناظرة بينهما أي أن:

(أ،ب) = (ج،د) إذا وفقط إذا كان أ = ج ٨ ب = د

ملاحظة : في الزوج المرتب (أ،ب) قد يكون أ = ب ولذلك قد نصادف أزواجاً مرتبة مثل (١ , ١) ، (٢ , ٢)، (أ،أ) . فقد رأيت في دراستك للمستوى الديكارتي أن بعض النقاط تمثلها أزواج مرتبة متساوية المساقط، أنظر الشكل (٣ - ١) التالي:



الشكل (٣-١)

مثال (١): إذا كان (٢ س ، ٧) = (٦، ص -١) فأوجد كلاً من س ، ص.

الحل: بما أن (٢ س ، ٧) = (٦،ص -١) فإن

٢ س = ٦ ، ٧ = ص -١

ومنها س = ٣ ، ص = ٨

وتستخدم الأزواج المرتبة لتعريف عملية أخرى على المجموعات تسمى ضرب المجموعات.

(٣ - ٢) ضرب المجموعات

إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن مجموعة كافة الزواج المرتبة التي مساقطها الأولى من أ ومساقطها الثانية من ب تسمى حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة أ في ب ، ويرمز لها بالرمز أ × ب ، أي أن أ × ب = {(س ، ص) : س ∋ أ ، ص ∋ ب }

وحاصل الضرب الديكارتي للمجموعة أ في نفسها، أي أ × أ يرمز لها بالرمز أ^{٢}

مثال (٢) : إذا كانت أ = {أ ، ب ، ج} ، ب = {١ ,٢} فان:

أ × ب = {(أ ، ١)، (أ،٢) ، (ب،١) ، (ب،٢) ، (ج ، ١) ، (ج ، ٢)}

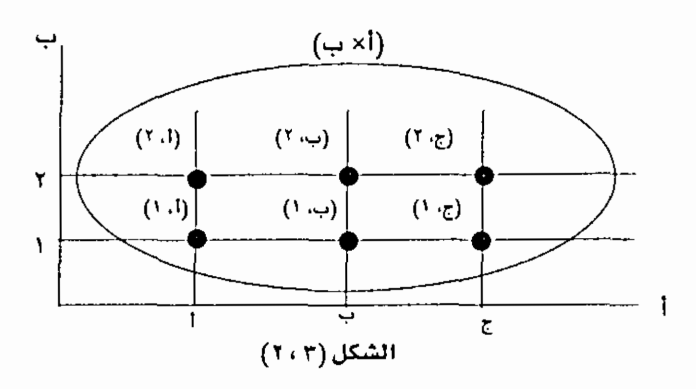
ب × أ = { (١ ، أ) ، (٢ ، أ) ، (١ ، ب) ، (٢ ، ب) ، (١ ، ج) ، (٢،ج)}

لاحظ أن أ × ب ≠ ب × أ

أي أن ضرب المجموعات ليس إبدالياً

ويمكن تمثيل مجموعة الضرب بيانياً كما يلي:

نرسم محورين متقاطعين - متعامدين في الغالب - ونضع على أحدهما عناصر المجموعة الأولى وعلى الثاني عناصر المجموعة الثانية، ثم نرسم من النقاط التي تمثل عناصر المجموعة الأولى موازيات للمحور الثاني. ومن النقاط التي تمثل عناصر المجموعة الثانية موازيات للمحور الأول، فتكون نقاط التقاطع لهذه الموازيات ممثلة لعناصر مجموعة الضرب. انظر الشكل (٣ - ٢) التالي الذي يمثل المجموعة أ × ب الواردة في المثال (٢):



الشكل (٣ ، ٢)

لاحظ ان عدد عناصر أ = ٣ وعدد عناصر ب = ٢

وعدد عناصر أ × ب = ٦ = ٣ × ٢

وبشكل عام، إذا كان عدد عناصر أ = ن وعدد عناصر ب = م فإن عدد الأزواج المرتبة في أ × ب = ن × م

مثال (٣) : لتكن أ = { ٣ ، ٥} ، ب {١ ، ٢ ، ٣} ، ج = {٢ ، ٥} فأوجد:

١) أ^{٢}

٢) أ × (ب ∪ ج)

٣) (أ × ب) ∪ (أ × ج)

٤) أ × (ب ∩ ج)

5) (أ × ب) ∩ (أ × ج)

الحل :

١) أ^{٢} = أ × أ = {(٣ ،٣) ، (٥ ،٣) ،(٣ ،٥) ، (٥ ،٥)}

٢) ب ∪ ج = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥}

∴ أ × (ب ∪ ج) = {(٣ ،١) ، (٣ ،٢)، (٣ ،٣)، (٣ ،٥)، (٥ ،١) ، (٥ ،٢)، (٥ ،٣)، (٥ ،٥)}

٣) أ × ب = {(٣ ،١) ، (٣ ،٢)، (٣ ،٣)، (٥ ،١) ، (٥ ،٢) ، (٥ ،٣)}

أ × ج = {(٣ ،٢)، (٣ ،٥)، (٥ ،٢)، (٥ ،٥)}

(أ × ب) ∪ (أ × ج) = {(٣ ،١)، (٣ ،٢)، (٣ ،٣)، (٥ ،١)، (٥ ،٢)، (٣ ،٥) (٥ ،٣)، (٥ ،٥)}

لاحظ ان:

أ× (ب ∪ ج) = (أ × ب) ∪ (أ × ج)

٤) ب ∩ ج = {٢}

∴ أ × (ب ∩ ج) = { (٣، ٢)، (٥، ٢)}

٥) (أ × ب) ∩ (أ × ج) = {(٣، ٢)، (٥، ٢)}

لاحظ ان،

أ × (ب ∩ ج) = (أ × ب) ∩ (أ × ج)

مثال (٤): لتكن أ = {٢، ٣، ٥} ، ب = {٧، ٩، ١٠}

أوجد:

١) أ × ب

٢) مجموعة الحل للجملة المفتوحة:

(س ، ص) ∋ أ × ب ، س عامل من عوامل ص.

الحل:

١) أ × ب = {(٢، ٧)، (٢، ٩) ، (٢، ١٠) ، (٣، ٧) ، (٣، ٩)، (٣، ١٠) ، (٥، ٧)، (٥، ٩)، (٥، ١٠)}

٢) مجموعة الحل للجملة المفتوحة هي:

ع = {(٢، ١٠)، (٣، ٩)، (٥، ١٠)}

المجموعة ع المحتواة في أ × ب مثال على مفهوم رياضي يسمى العلاقة، وهو ما سنتناوله في البند التالي:

(٣ - ٣) العلاقة:

إذا كانت أ ، ب مجموعتين، فإن كل مجموعة جزئية من أ × ب تعرف علاقة من أ إلى ب. نسمي هذه المجموعة الجزئية بيان العلاقة ونسمي أ مجالها، ب مجالها المقابل، والقاعدة التي نعتمدها في اختيار المجموعة الجزئية تسمى قاعدة العلاقة.

لاحظ في مثال (٤) السابق أن

* مجال العلاقة هو أ، ومجالها المقابل هو ب
* وقاعدة العلاقة هي "عامل من عوامل"
* وبيان العلاقة هي المجموعة ع.

سنرمز للعلاقة وقاعدتها وبيانها بنفس الرمز ع أو ك أو غير ذلك ويفهم المقصود من خلال السياق.

وإذا كان المجال والمجال المقابل لعلاقة ما هو المجموعة أ نفسها فإننا نسمي العلاقة عندئذ علاقة معرفة على أ.

وإذا كان الزوج المرتب (س،ص) ينتمي لبيان العلاقة ع المعرفة من أ إلى ب فإننا نقول: إن س يرتبط مع ص وفق قاعدة العلاقة ع ونكتب:

س ع ص أو (س،ص) ∈ ع

أما إذا كان س لا يرتبط مع ص وفق قاعدة العلاقة ع فإننا نكتب:

س ع̸ ص أو (س،ص) ∉ ع

مثال (٥): إذا كانت أ = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ب = { ٤، ٥، ٦، ٧} وكانت ع علاقة معرفة من أ إلى ب وفق القاعدة التالية: س ع ص إذا وفقط إذا كان س ∈ أ ، ص ∈ ب، س + ص = ٥

فإن:

* مجال العلاقة ع هو المجموعة أ
* ومجالها المقابل هو المجموعة ب
* وبيان العلاقة هو:

ع = {(-١ ، ٦) ، (٠ ، ٥) ، (١ ، ٤)}

أي أن -١ ع٦ ، ٠ ع٥ ، ١ ع٤

يسمى العنصر ٦ صورة العنصر -١.

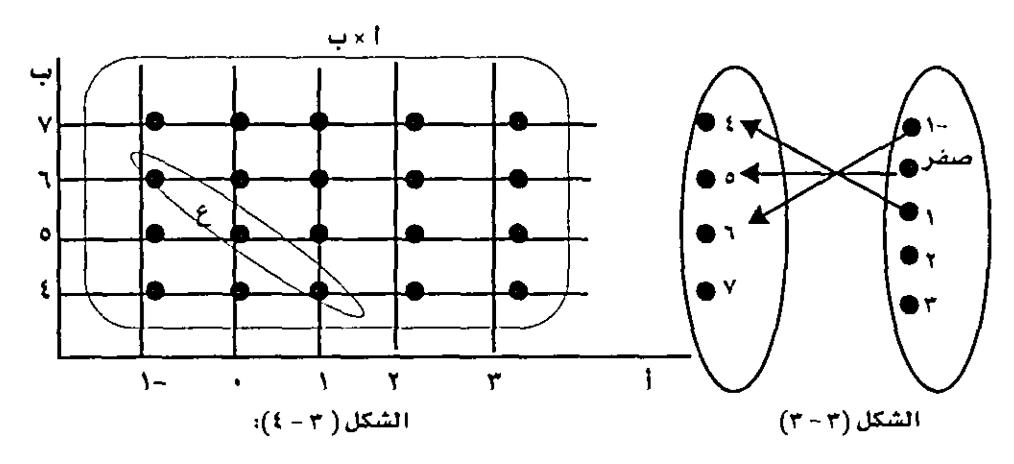
والعنصر ٥ صورة العنصر "٠"

والعنصر ٤ صورة العنصر ١

وتسمى مجموعة الصور {٤، ٥، ٦} مدى العلاقة

لاحظ أن مدى العلاقة ⊆ مجالها المقابل

هذا ومن الممكن تمثيل العلاقة بطرق عدة منها المخطط السهمي والتمثيل البياني كما هو واضح في الشكلين (٣ - ٣)، (٣ - ٤) التاليين:



الشكل (٣ - ٤):

الشكل (٣ - ٣)

الشكل (٣ - ٣): المخطط السهمي وفيه نمثل كل زوج مرتب في بيان العلاقة بسهم يربط عنصراً من المجال بصورته في المجال المقابل.

الشكل (٣ - ٤): التمثيل البياني وفيه نمثل المجموعة أ × ب بيانياً ونحدد ع كمجموعة جزئية منها.

مثال (٦) : لتكن س = { □ ، ○ ، ⏢ ، ⬠ ، △ }

ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

ولتكن ع علاقة معرفة من س إلى ص وفق القاعدة التالية:

س ع ص إذا وفقط إذا كان:

س ∋ س ، ص ∋ ص ، ص يساوي عدد أضلاع الشكل س

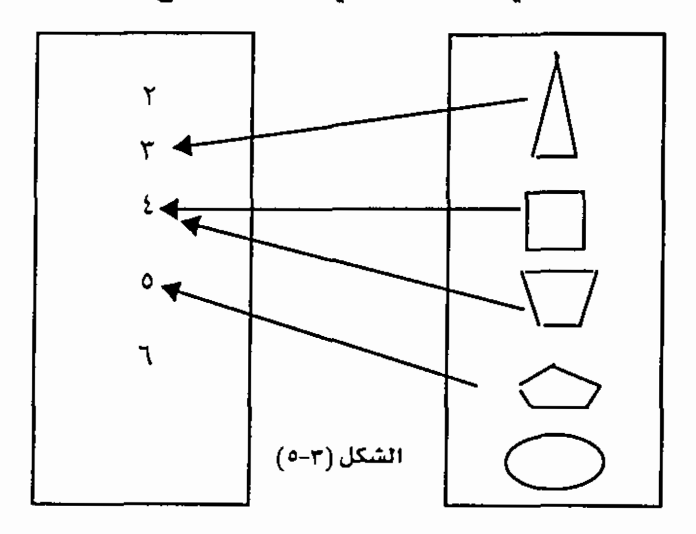
(١) اكتب بيان العلاقة ع ومداها

(٢) ارسم مخططاً سهمياً يمثلها.

الحل: (١) بيان العلاقة ع = {(△ ، ٣)؛ (□ ،٤)؛ (⏢ ،٤)؛ (⬠ ،٥)}

ومدى العلاقة ع = { ٣ ، ٤ ، ٥}

(٢) الشكل (٣ - ٥) التالي مخطط سهمي يمثل العلاقة ع



الشكل (٣-٥)

(٣ - ٤) خواص العلاقات المعرفة على مجموعة:

نعلم أنه إذا كان مجال العلاقة ع ومجالها المقابل هو المجموعة أ نفسها فإن ع تسمى علاقة معرفة على أ. وبيانها مجموعة جزئية من أ × أ وسندرس في هذا البند خواص العلاقات المعرفة على مجموعة.

أولاً - الانعكاس : تكون علاقة ع المعرفة على أ انعكاسية إذا وفقط إذا كان كل عنصر في أ مرتبط مع نفسه وفق قاعدة العلاقة ع.

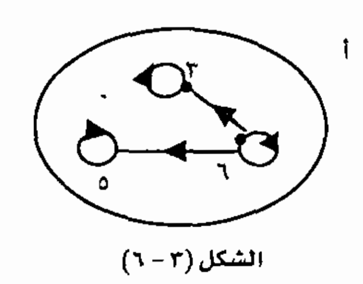
أي إذا وفقط إذا كان ∀ س ∋ أ يكون س ع س ...... (١)

فمثلاً علاقة ع المعرفة على المجموعة أ = {٣ ، ٥ ، ٦} حيث:

ع = {(٣ ، ٣)، (٦، ٣) ، (٥، ٥)، (٦، ٥)، (٦ ، ٦)}

علاقة انعكاسية لأنه لكل عنصر س ∋ أ يكون (س ، س) ∋ ع.

وإذا مثلنا هذه العلاقة بمخطط سهمي كما في الشكل (٣ - ٦) التالي، فإننا نلاحظ وجود عروة عند كل عنصر من عناصر أ.



الشكل (٣ - ٦)

وقد مر معنا في المنطق أن نفي العبارة المسورة كلياً (١) هو:

E س ∋ أ بحيث يكون س ع̸ س

أي أن العلاقة ع لا تكون انعكاسية إذا وفقط إذا وجد على الأقل عنصر في أ لا يرتبط مع نفسه وفق قاعدة العلاقة.

ثانياً : التماثل

تكون علاقة ع المعرفة على أ تماثلية إذا وفقط إذا كان ارتباط عنصر س بعنصر آخر ص يحتم ارتباط ص مع س أي أنه:

إذا كان س ع ص فإن ص ع س

أو ∀ (س،ص) ∋ ع يكون (ص ، س) ∋ ع .... (٢)

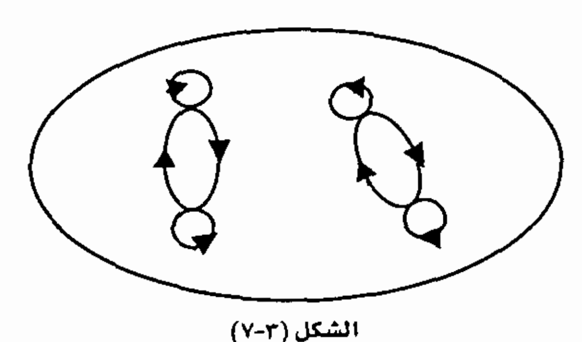
فمثلاً:

علاقة ع المعرفة على المجموعة أ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

حيث ع = {(٢ ، ٢)، (٤ ، ٢)، (٣ ، ٣)، (٥ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٤) ، (٣ ، ٥)، (٥ ، ٥)}

علاقة تماثلية لأنه لكل (س،ص) ∋ ع يكون (ص،س) ∋ ع.

وإذا مثلنا هذه العلاقة بمخطط سهمي كما في الشكل (٣ - ٧) فإننا نلاحظ أنه لكل سهم واصل بين عنصرين يوجد سهم معاكس له.



الشكل (٣-٧)

وبما أن نفي العبارة المسورة كلياً (٢) هو:

E (س،ص) ∋ ع بحيث يكون (ص،س) ∌ ع

فإننا نستنتج أن علاقة ع لا تكون تماثلية إذا وفقط إذا وجد على الأقل زوج مرتب (س،ص) ∋ ع بينما (ص ، س) ∌ ع.

سؤال : هل هذه العلاقة انعكاسية؟ ولماذا؟

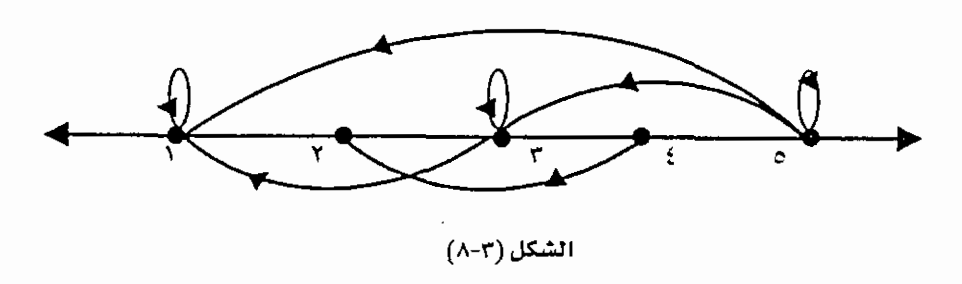
مثال (٧) : إذا كانت أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} وكانت ع علاقة معرفة على أ حيث:

ع = {(١، ١)، (٣، ١)، (٣، ٣)، (٤، ٢)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٥، ٥)} فإن

ع ليست انعكاسية لأن ٢ ∋ أ بينما ٢ ∉ ٢

ع ليست تماثلية لأن ٤ ع ٢ بينما ٢ ∉ ٤

والمخطط السهمي للعلاقة ع كما في الشكل (٣ - ٨) التالي:



الشكل (٣-٨)

لاحظ أنه لا توجد عروة عند كل من العنصرين ٢، ٤ فالعلاقة ليست انعكاسية وفي الشكل أسهم لا توجد أسهم معاكسة لها (مثل السهم الواصل من ٤ إلى ٢) فالعلاقة ليست تماثلية.

ثالثاً: التعدي:

تكون علاقة ع المعرفة على مجموعة أ متعدية إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

إذا كان س ع ص ∧ ص ع ل فإن س ع ل، أو ∀ (س، ص) ∋ ع ∧ (ص، ل) ∋ ع يكون (س، ل) ∋ ع ... (٣)

فمثلاً، علاقة "أصغر من" المعرفة على المجموعة ط علاقة متعدية لأنه إذا كان

س < ص ∧ ص < ل فإن س < ل

وكذلك علاقة "يوازي" المعرفة على المستقيمات المستوية علاقة متعدية لأنه، إذا كان ل↔ // م↔ ∧ م↔ // ن↔ فإن ل↔ // ن↔

وبما أن نفي العبارة (٣) المسورة كلياً هو:

E (س، ص) ∈ ع ∧ (ص، ل) ∈ ع بحيث يكون (س، ل) ∉ ع.

فإننا نستنتج أن علاقة ع لا تكون متعدية إذا وفقط إذا وجد على الأقل زوجان مرتبان

(س، ص) ∈ ع ∧ (ص، ل) ∈ ع بينما (س، ل) ∉ ع

مثال (٨) : لتكن أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ولتكن ع علاقة معرفة على أ حيث

ع = {(٢، ١) ، (٤، ٣) ، (٢، ٢)، (١، ٢) ، (٣، ١)} فهل ع علاقة متعدية؟

الحل: نبدأ بتطبيق الشرط على كل الأزواج المرتبة ذات الشكل:

(س،ص) ∈ ع ∧ (ص،ل) ∈ ع

(١، ٢) ∧ (٢، ١) ∈ ع بينما (١، ١) ∉ ع.

∴ ع ليست متعدية

مثال (٩): لتكن ع علاقة معرفة على المجموعة أ = { ٢، ٣، ٤} حيث:

ع = { (٢، ٢)، (٣، ٢)، (٢، ٣)} ادرس خواص العلاقة ع.

الحل : (١) ع ليست انعكاسية لأن ٣ ∈ أ بينما (٣، ٣) ∉ ع

(٢) ع متماثلة لأنه : ∀ (س،ص) ∈ ع يكون (ص،س) ∈ ع

(٣) ع ليست متعدية لأن: (٣، ٢) ∈ ع ∧ (٢، ٣) ∈ ع بينما (٣، ٣) ∉ ع.

ملاحظة: تكون علاقة ع المعرفة على مجموعة أ انعكاسية، ومتماثلة ومتعدية ما لم نجد مثالاً ينفي ذلك.

مثال (١٠): العلاقة ع = { (٢، ٣)} المعرفة على المجموعة أ = { ٣، ٢، ١}

ليست انعكاسية لأن ٢ ∈ أ بينما (٢، ٢) ∉ ع

وليست متماثلة لأن (٢، ٣) ∈ ع بينما (٣، ٢) ∉ ع

ولكنها متعدية لأننا لا نستطيع أن نجد مثالاً ينفي ذلك.

مثال (١١) : لتكن أ = {٢ ، ٣ ، ٥} ولتكن ع علاقة على أ حيث:

ع = {(٢ ، ٥)، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٢) ، (٢ ، ٢)، (٣ ، ٢)، (٥ ، ٥)}

بين أن ع علاقة متعدية

الحل: سنتتبع شرط التعدي على كل الحالات:

(٢ ، ٥) ∧ (٥ ، ٢) ∈ ع ⇐ (٢ ، ٢) ∈ ع

(٢ ، ٥) ∧ (٥ ، ٥) ∈ ع ⇐ (٢ ، ٥) ∈ ع

(٣ ، ٥) ∧ (٥ ، ٢) ∈ ع ⇐ (٣ ، ٢) ∈ ع

(٣ ، ٥) ∧ (٥ ، ٥) ∈ ع ⇐ (٣ ، ٥) ∈ ع

(٥ ، ٢) ∧ (٢ ، ٥) ∈ ع ⇐ (٥ ، ٥) ∈ ع

(٥ ، ٢) ∧ (٢ ، ٢) ∈ ع ⇐ (٥ ، ٢) ∈ ع

(٢ ، ٢) ∧ (٢ ، ٥) ∈ ع ⇐ (٢ ، ٥) ∈ ع

(٣ ، ٢) ∧ (٢ ، ٥) ∈ ع ⇐ (٣ ، ٥) ∈ ع

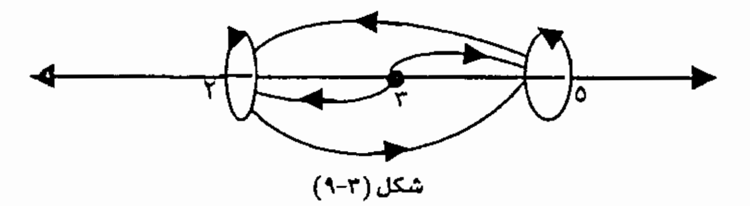
(٣ ، ٢) ∧ (٢ ، ٢) ∈ ع ⇐ (٣ ، ٢) ∈ ع

(٥ ، ٥) ∧ (٥ ، ٢) ∈ ع ⇐ (٥ ، ٢) ∈ ع

مما سبق نلاحظ أن شرط التعدي محقق في جميع الحالات، أي أننا لم نجد مثالاً واحداً ينفي شرط التعدي.

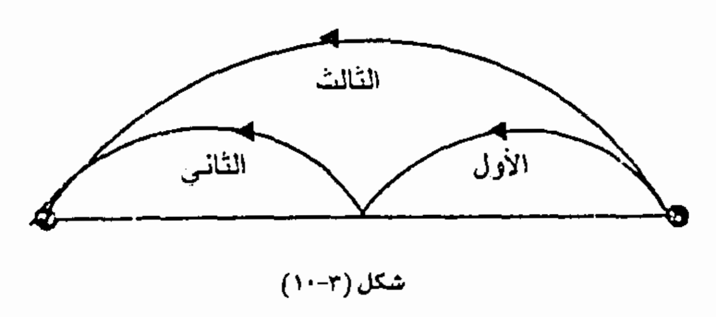
∴ فالعلاقة ع متعدية

والمخطط السهمي للعلاقة ع كما في الشكل (٣ – ٩) التالي:



شكل (٣-٩)

وتكون ع علاقة متعدية إذا كان لكل سهمين متتالين يوجد سهم ثالث ينطلق من بداية الأول ويصل لنهاية الثاني كما يلي:



شكل (٣-١٠)

رابعاً: التخالف:

تكون علاقة ع المعرفة على المجموعة أ تخالفية إذا وفقط إذا كان

∀ (س ، ص) ∈ ع ∧ (ص،س) ∈ ع يكون س = ص ..... (٤)

أي أنه

إذا كان س ≠ ص وكان (س ، ص) ∈ ع فإن (ص ، س) ∉ ع

وتكون ع ليست تخالفية إذا وفقط إذا وجد زوج مرتب (س،ص) ∈ ع حيث س ≠ ص وكان (ص،س) ∈ ع أيضاً.

مثال (١٢) : العلاقة ع$_1$= {(١ ، ٣)، (٤ ، ٢)، (٤ ، ٤)، (٢ ، ٤)} المعرفة على المجموعة أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ليست تخالفية لأن (٢ ، ٤) ∈ ع$_1$ ∧ (٤ ، ٢) ∈ ع$_1$ أيضاً.

بينما العلاقة ع$_2$ = {(١ ، ٣)، (٣ ، ٣)، (٢ ، ٣)، (٤ ، ٤)} تخالفية لأنه،

∀ (س،ص) ∈ ع$_2$ حيث س ≠ ص يكون (ص،س) ∉ ع$_2$

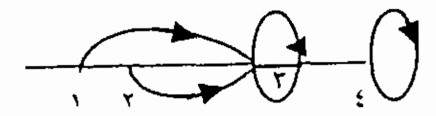
فمثلاً : (١ ، ٣) ∈ ع$_2$ بينما (٣ ، ١) ∉ ع$_2$

(٢ ، ٣) ∈ ع$_2$ بينما (٣ ، ٢) ∉ ع$_2$

والمخططان السهميان للعلاقتين ع$_1$ ، ع$_2$ كما في الشكلين (٣ - ١١)، (٣ - ١٢) التاليين:



المخطط السهمي للعلاقة غير التخالفية ع$_1$ لاحظ أن ٢ ، ٤ عنصران مختلفان بينهما سهمان متعاكسان.



المخطط السهمي للعلاقة التخالفية ع$_2$ لاحظ أنه لا وجود لسهمين متعاكسين بين عنصرين مختلفين.

خامساً : الترتيب

تكون علاقة ع المعرفة على مجموعة أ علاقة ترتيب إذا وفقط إذا كانت العلاقة ع انعكاسية وتخالفية ومتعدية

مثال (١٣): لتكن ع علاقة معرفة على ط وفق القاعدة التالية:

س ع ص إذا وفقط إذا كان س ∋ ط ، ص ∋ ط ، س ≥ ص

هل ع علاقة ترتيب على ط؟

الحل: (١) العلاقة ع انعكاسية لأنه،

∀ س ∋ ط تكون س ≥ س عبارة صحيحة

(٢) العلاقة ع تخالفية لأنه،

إذا كان س ≥ ص ∧ ص ≥ س فإن س = ص

(٣) العلاقة ع متعدية لأنه،

إذا كان س ≥ ص ∧ ص ≥ ل فإن س ≥ ل

∴ ع علاقة ترتيب على ط

سادساً : التكافؤ وصفوف التكافؤ:

تكون علاقة ع المعرفة على مجموعة أ علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا كانت العلاقة ع انعكاسية وتماثلية ومتعدية

مثال (١٤): لتكن ع علاقة معرفة على أ = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} وفق القاعدة التالية:

س ع ص إذا وفقط إذا كان باقي قسمة س على ٣ يساوي باقي قسمة ص على ٣.

هل ع علاقة تكافؤ؟

الحل (١): العلاقة ع انعكاسية لأنه:

∀س ∋ أ يكون باقي قسمة س على ٣ = يساوي باقي قسمة س على ٣ أي س ع س

(٢) العلاقة ع تماثلية لأنه،

إذا كان باقي قسمة س على ٣ = باقي قسمة ص على ٣ أي س ع ص

فإن باقي قسمة ص على ٣ = باقي قسمة س على ٣ أي ص ع س.

(٣) العلاقة ع متعدية لأنه،

إذا كان باقي قسمة س على ٣ = باقي قسمة ص على ٣ أي س ع ص

وكان باقي قسمة ص على ٣ = باقي قسمة ل على ٣ أي ص ع ل

فإن باقي قسمة س على ٣ = باقي قسمة ل على ٣ أي س ع ل

∴ ع علاقة تكافؤ

وإذا رمزنا لمجموعة عناصر أ التي يرتبط معها العنصر س ∋ أ بالرمز [س] فإن:

[٠] = {٠، ٣، ٦، ٩} (تذكر أن [٠] لا يعني العنصر "٠" بل مجموعة العناصر التي يرتبط معها العنصر "٠")

[١] = {١، ٤، ٧}

[٢] = {٢، ٥، ٨}

وإذا اخترنا عنصراً من [٠] مثل ٣ فإن:

[٣] = {٠، ٣، ٦، ٩} = [٠]

أي أنه،

إذا كان س ع ص فإن [س] = [ص]

نسمي المجموعات [٠] ، [١] ، [٢] التي نتجت عن علاقة التكافؤ ع صفوف تكافؤ، لاحظ أن:

(١) كل صف تكافؤ مجموعة غير خالية ومحتواه في أ

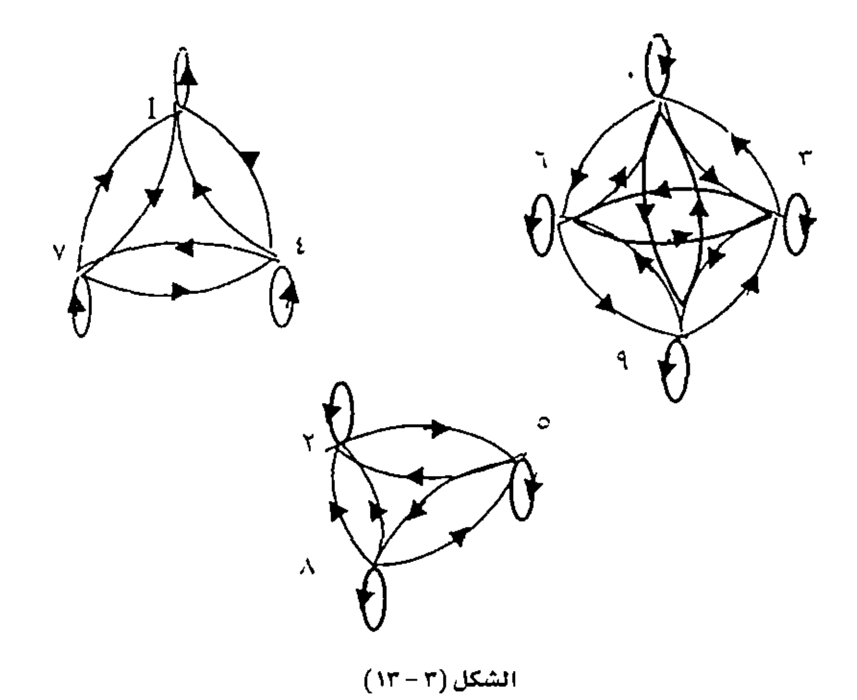
(٢) تقاطع أي صفي تكافؤ مجموعة خالية، أي أن،

[٠] ∩ [١] = Φ ، [٠] ∩ [٢] = Φ ، [١] ∩ [٢] = Φ

(٣) اتحاد جميع صفوف التكافؤ يساوي المجموعة أ ، أي أن

[٠] ∪ [١] ∪ [٢] = أ

وإذا رسمنا مخططاً سهمياً لعلاقة التكافؤ كما في الشكل (٣ – ١٣)



الشكل (٣ - ١٣)

فإننا نلاحظ أن عناصر كل صف تكافؤ مرتبطة مع بعضها بعلاقة التكافؤ ولا يوجد ارتباط بين أي عنصرين من صفين مختلفين.

تمارين (٣ - ٢)

١ - لتكن أ = {٢، ٣} ، ب = {٣، ٤} ، ج = {١، ٣، ٥}

اكتب كلاً من المجموعات التالية:

١) أ × ب　　　　٢) ب ٢

٣) ب × ج　　　　٤) أ × (ب ∪ ج)

٥) (أ × ب) ∪ (أ × ج)　　　　٦) أ × (ب ∩ ج)

٧))أ × ب) ∩ (أ × ج)

٢ - لتكن أ = {س ، ص ، ع) ، ب = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

(١) اكتب مجموعة القوة للمجموعة أ

(٢) إذا كانت ع علاقة معرفة من ق (أ) إلى ب وفق القاعدة التالية:

س ع ص وفقط إذا كان س ∋ ق (أ)، ص ∋ ب ، ص يساوي عدد عناصر س.

ارسم مخططاً سهمياً يمثل العلاقة ع.

٣ - إذا كانت أ = {١ ,٢ ,٣ ,٤ ,٥} وكانت ع علاقة معرفة على أ وفق القاعدة التالية:

س ع ص إذا وفقط إذا كان س ∋ أ ص ∋ أ، س - ص عدد صحيح يقسم على العدد ٢ بدون باق.

(١) اكتب بيان العلاقة ع

(٢) ارسم مخططاً سهمياً للعلاقة ع

(٣) ادرس خواص العلاقة ع

٤ - اكمل الجدول التالي كما في السطر الأول:

العلاقة	انعكاسية	تماثلية	متعدية	تخالفية
١ علاقة "=" على ط	√	√	√	√
٢ - علاقة "<" على ط				
٣ - علاقة ≤ على ط				
٤- علاقة "عامل من عوامل" على ط				
٥- علاقة "يوازي" على مجموعة المستقيمات المستوية.				
٦- علاقة "عمودي على" على مجموعة المستقيمات المستوية.				
٧ علاقة ⊇ على المجموعات				
٨ علاقة "التطابق" على مجموعة القطع المستقيمة.				
٩ علاقة "التشابه" على مجموعة المثلثات.				

(٣ - ٥) الاقترانات (أو التطبيقات)

إذا كانت ق علاقة معرفة من أ إلى ب بحيث كان:

كل عنصر من أ يرتبط بعنصر واحد فقط من ب

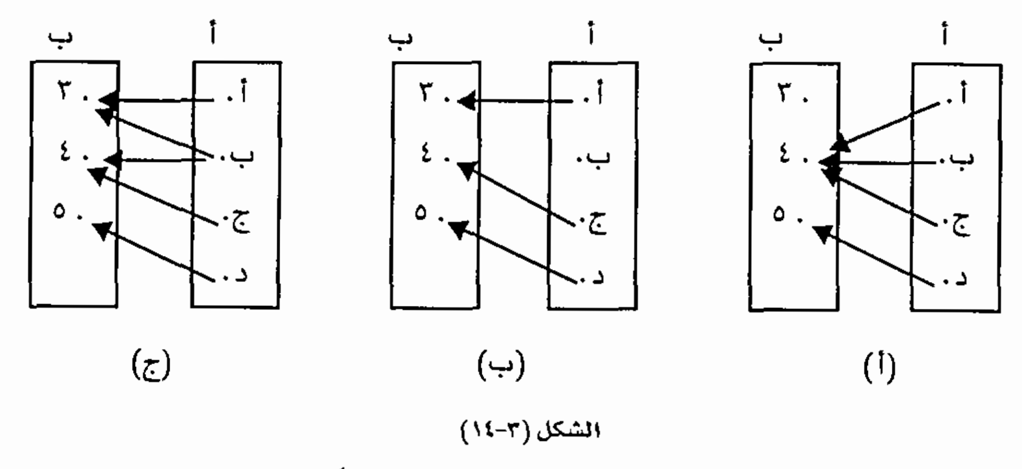
فإن ق يسمى اقتراناً من أ إلى ب ونكتب:

ق : أ ← ب أو أ ——ق——◄ ب

نسمي المجموعة أ مجال الاقتران ق ، والمجموعة ب مجاله المقابل.

وإذا كان س ∋ أ مرتبطاً بالعنصر ص ∋ ب فإننا نسمي ص صورة العنصر س وفق قاعدة الاقتران ق أو قيمة الاقتران ق عند العنصر س ونرمز لها بالرمز ق (س) ، أي أن ص = ق (س)

مثال (١٥): إذا كانت أ = { أ،ب ، ج ، د} ، ب = {٣، ٤، ٥} فأي من المخططات السهمية التالية يمثل اقتراناً من أ إلى ب؟ واذكر السبب.



الشكل (٣-١٤)

الحل: (١) في الشكل (٣ - ١٤ - أ) : المخطط يمثل اقتراناً لأن كل عنصر من أ ارتبط بعنصر واحد فقط من ب، أي أن كل عنصر من أ له صورة واحدة فقط في ب وفق قاعدة الربط.

(٢) في الشكل (٣ - ١٤-ب) : المخطط لا يمثل اقتراناً لأن العنصر ب ∋ أ لم يرتبط بعنصر من عناصر ب أي أن العنصر ب ∋ أ ليس له صورة في المجموعة ب.

(٣) في الشكل (٣ - ١٤- ج) : المخطط لا يمثل اقتراناً لأن العنصر ب ∋ أ ارتبط

بعنصرين من مجموعة ب وهما ٤ ، ٣ أي أن العنصر ب ∋ أ له أكثر من صورة في المجموعة ب.

وإذا رمزنا للاقتران الذي يمثله المخطط في الشكل (٣ - ١٤-أ) بالرمز ق فإن

ق (أ) = ٤ ، ق (ب) = ٤،ق (ج) = ٤ ، ق (د) = ٥

ومجموعة الصور {٥ ، ٤} تسمى مدى الاقتران ق ، لاحظ أن:

مدى ق ⊇ المجال المقابل ب

مثال (١٦): لتكن أ = {١، ٢، ٣، ٤} ، ب = {أ، ب ، ج ، د ، هـ} ولتكن ع علاقة معرفة من أ إلى ب حيث:

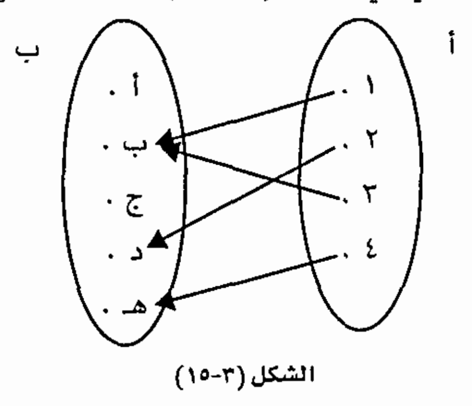
ع = { (١،ب)، (٢،د) ، (٣،ب)، (٤،هـ)}

١) ارسم مخططا سهمياً يمثل العلاقة ع

٢) هل ع اقتران من أ إلى ب ؟

٣) إن كانت ع اقترانا فاكتب مداه.

الحل (١): المخطط السهمي في الشكل (٣ - ١٥) يمثل العلاقة ع.



الشكل (٣-١٥)

(٢) العلاقة ع اقتران من أ إلى ب لأن:

كل عنصر من المجال أ ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل ب. لاحظ أنه، في بيان العلاقة ع = {(١،ب)، (٢،د)، (٣،ب)، (٤،هـ)} :

(أ) لا يوجد زوجان مرتبان لهما المسقط الأول نفسه.

(ب) مجموعة المساقط الأولى {١، ٢، ٣، ٤} هي المجال أ

لهذين الشرطين كانت ع اقترانا:

وبشكل عام، إذا كان ق اقتراناً معرفا من أ إلى ب فإن بيان الاقتران ق هو المجموعة:

ق = { (س،ص): س ∋ أ، ص ∋ ب ، ص = ق (س) }

(٣) مدى ق = مجموعة المساقط الثانية (الصور) = {ب،د ، هـ}

مثال (١٧): لتكن أ = {١، ٢، ٣} ب = {٤، ٦، ٩، ١٤} ولتكن ق علاقة معرفة من أ إلى ب وفق القاعدة التالية:

س ق ص إذا وفقط إذا كان ص = ٥ س – ١ حيث س ∋ أ ، ص ∋ ب

١) أوجد مدى العلاقة ق، واكتب بيانها.

٢) ارسم مخططاً سهمياً يمثل العلاقة ق

٣) هل العلاقة ق اقتران من أ إلى ب؟

الحل: يمكن التعبير عن العلاقة وقاعدتها بالرموز على النحو التالي:

ق : أ ← ب حيث:

س ← ص = ق (س) = ٥ س – ١.

وتقرأ القاعدة كما يلي:

كل عنصر س من المجال أ يرتبط بعنصر ص من المجال المقابل ب يسمى صورة العنصر س بالاقتران ق والتي تساوي خمسة أمثال س مطروحاً منه ١

(١) ق (١) = ٥ (١) –١ = ٤ ∋ ب

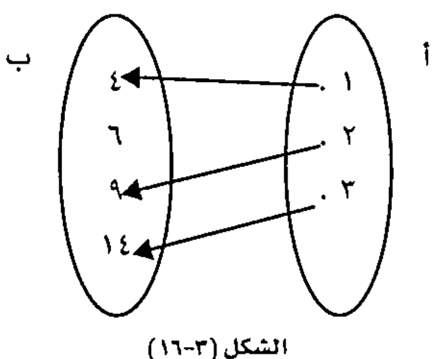
ق (٢) = ٥ (٢) –١ = ٩ ∋ ب

ق (٣) = ٥ (٣) –١ = ١٤ ∋ ب

∴ مدى العلاقة ق = { ٤، ٩، ١٤}

وبيان العلاقة ق = {(١، ٤) ، (٢، ٩)، (٣، ١٤)}

٢) المخطط السهمي للعلاقة ق كما في الشكل (٢ – ١٦):



الشكل (٣-١٦)

(٣) العلاقة ق اقتران من أ إلى ب لأن كل عنصر من المجال أ ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل ب.

وكما درسنا في بند سابق بعض خواص العلاقات، سندرس في البند التالي بعض خواص الاقترانات.

(٣ - ٦) خواص الاقترانات:

اقتصرت دراستنا لخواص العلاقات على العلاقات المعرفة على مجموعة، أما هنا فسندرس خواص الاقترانات بشكل عام، أي دون اشتراط أن يكون المجال والمجال المقابل هو المجموعة نفسها.

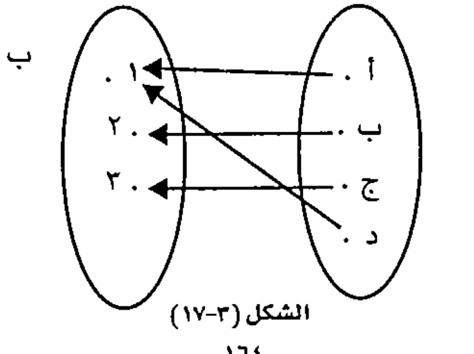
أولاً : الاقتران الشامل:

يكون الاقتران ق المعرف من أ إلى ب شاملاً إذا وفقط إذا كان كل عنصر من مجاله المقابل ب صورة لعنصر على الأقل من المجال أ ، أي أن

مدى الاقتران ق = مجاله المقابل

فمثلاً، الاقتران ق المعرف بالمخطط السهمي المبين في الشكل (٣ – ١٧) اقتران شامل لأن كل عنصر في المجال المقابل صورة لعنصر أو أكثر من عناصر المجال أي أن

مدى ق = { ٣ ، ٢ ، ١} = المجال المقابل ب

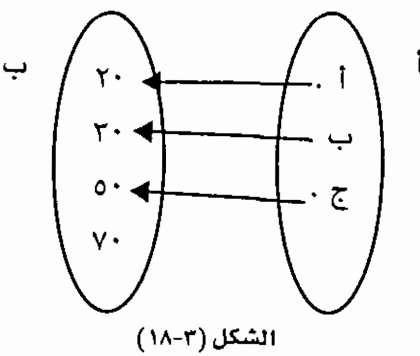


الشكل (٣-١٧)

ثانياً : الاقتران المتباين (أو واحد لواحد):

يكون الاقتران ق المعرف من أ إلى ب متباينا (أو اقتران واحد لواحد) إذ وفقط إذا كان كل عنصر من مجاله المقابل ب صورة لعنصر على الأكثر من مجاله أ أو كل عنصر من مداه صورة لعنصر واحد فقط من عناصر مجاله أ.

فمثلاً، الاقتران ق المعرف بالمخطط السهمي المبين في الشكل (٣ - ١٨) اقتران متباين لأن مداه = {٢، ٣، ٥} وكل عنصر في هذا المدى صورة لعنصر واحد فقط من عناصر المجال.

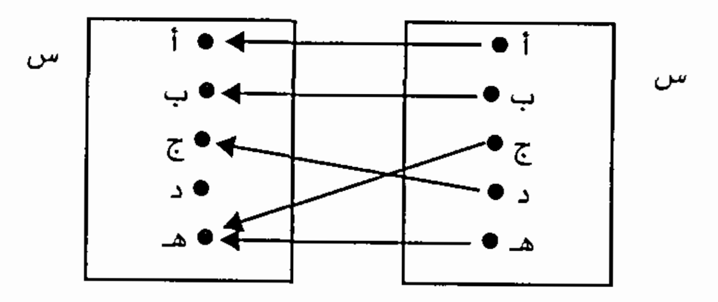


الشكل (٣-١٨)

ثالثاً : اقتران التقابل (أو التقابل):

يكون الاقتران ق : أ ← ب تقابلاً (أو تناظراً) إذا وفقط إذا كان شاملاً ومتبايناً.

مثال (١٨) : لتكن س = {أ ، ب ، ج ، د ، هـ) } ولتكن ق علاقة معرفة على س (أي من س إلى س) كما في المخطط التالي:



تأكد أن ق اقتران وادرس خواصه.

الحل: بما أن كل عنصر في المجال س ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل س فإن ق اقتران على س.

وبما أن مدى ق = {أ ، ب ، ج ، هـ} ≠ المجال المقابل س فإن الاقتران ق ليس شاملاً.

لاحظ العنصر د في المجال المقابل ليس صورة لأي عنصر من عناصر المجال.

وبما أن العنصر هـ في المجال المقابل صورة لعنصرين من عناصر المجال وهما ج ، هـ فإن الاقتران ق ليس متبايناً.

∴ فالاقتران ق ليس تقابلا

مثال (١٩): لتكن س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ، ص = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

وليكن ت : س ← ص حيث ت (س) = ١٠ − ٢ س

ادرس خواص الاقتران ق

الحل: بما أن ت (١) = ١٠ − ٢ (١) = ٨

ت (٢) = ١٠ − ٢ (٢) = ٦

ت (٣) = ١٠ − ٢ (٣) = ٤

ت (٤) = ١٠ − ٢ (٤) = ٢

ت (٥) = ١٠ − ٢ (٥) = صفر

فإن مدى ت = {٨، ٦، ٤، ٢، ٠}

ولأن مدى ت = المجال المقابل ص فإن الاقتران ت شامل

ولأن كل عنصر في المدى صورة لعنصر واحد فقط من عناصر المجال س فإن الاقتران ت متباين

∴ فالاقتران ت تقابل

(٣ - ٧) اقترانات خاصة

سنتناول في هذا البند اقترانين جبريين شائعين هما الاقتران الخطي والاقتران التربيعي.

أولاً : الاقتران الخطي:

الاقتران الخطي هو اقتران ق معرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح وقاعدته على الصورة : ق (س) = أ س + ب حيث أ ، ب عددين حقيقيين أ ≠ صفر.

ولأن تمثيله البياني سيكون خطاً مستقيماً في المستوى، فلرسمه نختار عنصرين من المجال ونحسب صورتيهما ونعين نقطتين في المستوى نصل بينهما بخط مستقيم فيكون هو بيان الاقتران ق.

مثال (٢٠): ارسم الاقتران ق : ح ← ح حيث ق (س) = ٢ س + ١

الحل: تتبع الخطوات التالية لرسم بيان الاقتران

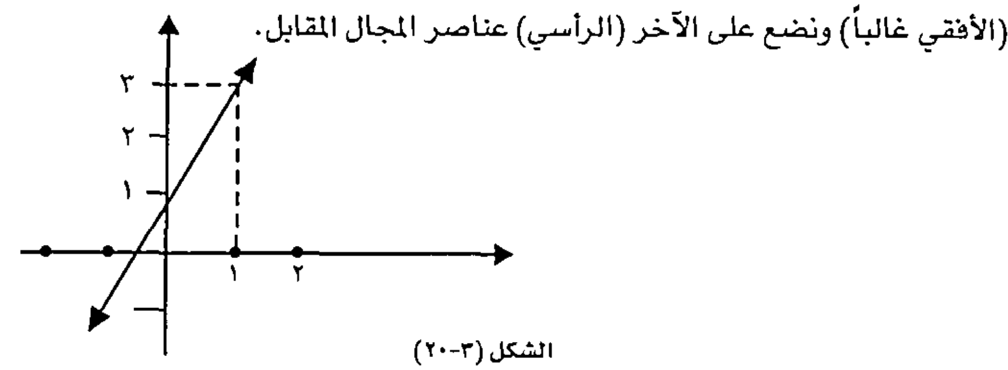
(١) نختار أي عددين من المجال ح مثل صفر، ١ ثم نحسب صورتيهما.

ق (٠) = ٢ (٠) + ١ = ١

ق (١) = ٢ (١) + ١ = ٣

∴ (٠ , ١) ، (١ , ٣) ينتميان لبيان الاقتران.

(٢) نرسم مستقيمين متقاطعين (متعامدين غالباً) ونضع على أحدهما عناصر المجال (الأفقي غالباً) ونضع على الآخر (الرأسي) عناصر المجال المقابل.



الشكل (٣-٢٠)

نعين النقطتين (٠ , ١) ، (١ , ٣) ونصل بينهما بخط مستقيم فيكون هو بيان الاقتران ق (انظر الشكل (٣ - ٢٠))

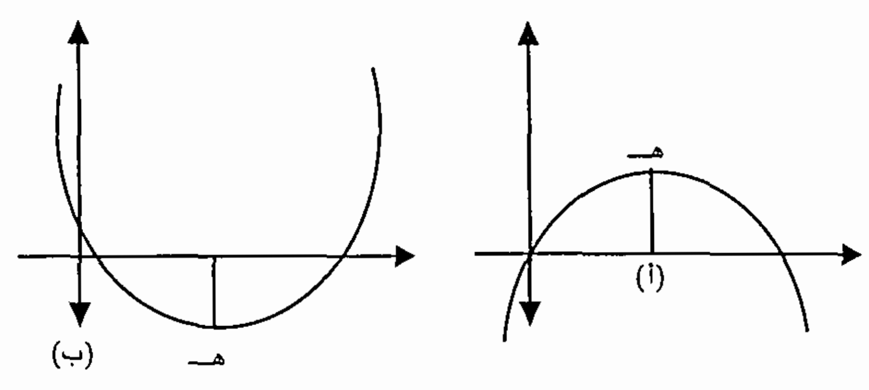
ثانياً : الاقتران التربيعي:

الاقتران التربيعي هو اقتران ق معرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح وقاعدته على الصورة:

ق (س) = أ س ٢ + ب س + ج

حيث أ ، ب ، ج أعداد حقيقية، أ ≠ صفر

ومنحنى الاقتران التربيعي يأخذ شكل الجرس كما في الشكل (٣ - ٢١)



الشكل (٣-٢١)

ويكون مفتوحاً لأعلى (شكل (٣ - ١٢ب)) إذا كان معامل س^{٢} موجباً (أ> ٠).

ومفتوحاً لأسفل (شكل (٣ - ٢١أ)) إذا كان معامل س^{٢} سالباً (أي أ < ٠) وتسمى النقطة هـ رأس المنحنى حيث:

الإحداثي السيني لرأس المنحنى = -ب / ٢أ = - معامل س / ٢ × معامل س^{٢}

ولرسم منحنى الاقتران التربيعي نبدأ أولاً بتعيين نقطة الرأس ثم نعين نقطتين على الأقل إلى يمينها ونقطتين على الأقل إلى يسارها، ونصل بين النقاط بمنحنى ممهد، كما في المثال التالي:

مثال (٢١): ارسم منحنى الاقتران التربيعي ق حيث:

ق (س) = س ٢ + ٢ س -٣

الحل: تتبع الخطوات التالية لرسم المنحنى:

(١) نعين رأس المنحنى:

الإحداثي السيني لرأس المنحنى = - معامل س / ٢ × معامل س ٢ = -٢ / ٢ = -١

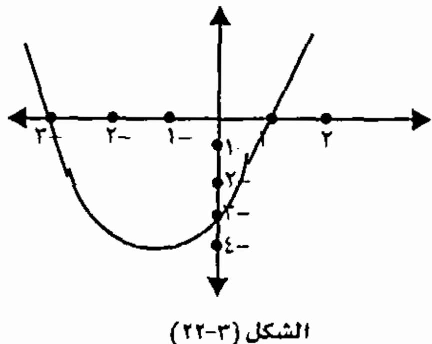
وبما أن ق (-١) = (-١)^{٢} + ٢ (-١) - ٣ = -٤

فإن رأس المنحنى هو النقطة (-١،-٤) والمنحنى مفتوح لأعلى لأن معامل س ٢ موجب

(٢) نكون جدولاً كالتالي نضع فيه نقطة الرأس في المنتصف ونقطتين إلى يمينها ونقطتين إلى يسارها:

س	ق (س)	النقطة (س ، ص)
٣-	٠	(-٣،٠)
٢-	٣-	(-٢،-٣)
١-	٤-	(-١،-٤)
٠	٣-	(٠،-٣)
١	٠	(١،٠)

(٣) نرسم مستقيمين متقاطعين (متعامدين غالباً) ونضع على أحدهما عناصر المجال (أفقي غالباً) ويسمى محور السينات، ونضع على الآخر (رأسي غالباً) عناصر المجال المقابل ويسمى محور الصادات.



الشكل (٣-٢٢)

(٤) نعين النقاط الواردة في الجدول ونصل بينهما بمنحنى فيكون هو منحنى الاقتران التربيعي (انظر الشكل (٣ - ٢٢).

مثال (٢٢) : ارسم منحنى الاقتران التربيعي ق حيث:

ق (س) = ٤ − س^{٢}

الحل: (١) الإحداثي السيني لرأس المنحنى = − معامل س / ٢ × معامل س^{٢} = صفر/ −٢ = صفر.

(لاحظ أن س غير ظاهرة في قاعدة الاقتران وهذا يعني أن معاملها يساوي صفر).

والمنحنى مفتوح لأسفل لأن معامل س^{٢} سالب.

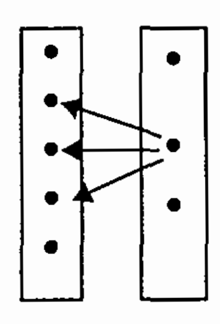
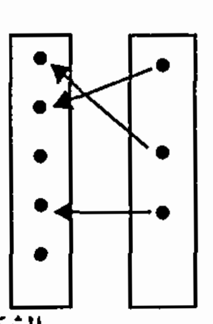
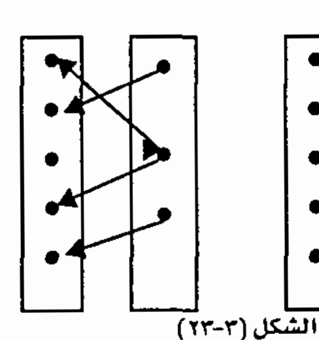
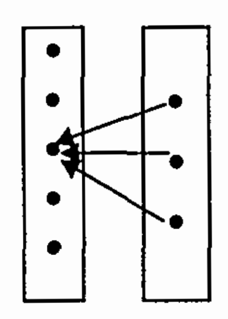
(٢) نكون جدولاً نحدد فيه بعض النقاط التي يمر بها المنحنى، ثم نرسم المنحنى كما يلي:

س	ص	(س، ص)
٢-	٠	(٢- , ٠)
١-	٣	(١- , ٣)
٠	٤	(٠ , ٤)
١	٣	(١ , ٣)
٢	٠	(٢ , ٠)

الشكل (٣-٢٣)

تمارين (٣ - ٢)

١ - بين أياً من المخططات السهمية التالية يمثل اقتراناً من س إلى ص مع ذكر السبب:

الشكل (٣-٢٣)

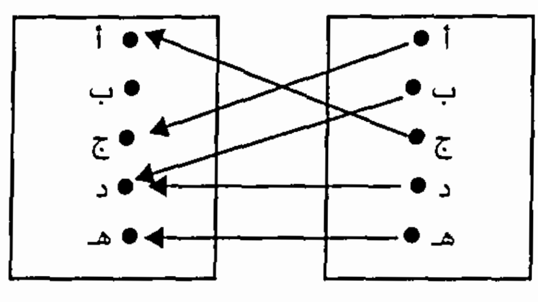
٢ - لتكن أ = {٢ , ٣ , ٤ , ٥} فأي من العلاقات التالية تمثل اقتراناً على أ مع ذكر السبب:

١) ع$_{1}$ = { (٢ , ٢) ، (٥ , ٣)، (٤ , ٤) ، (٢ , ٥)}

٢) ع$_{2}$ = {(٣ , ٢) ، (٢ , ٣)، (٤ , ٢) ، (٢ , ٤)، (٥ , ٥)}

٣) ع$_{3}$ = {(٥ , ٢) ، (٢ , ٥)، (٣ , ٣)}

٣- ليكن ت اقتراناً معرفاً على المجموعة س = {أ ، ب ، ج ، د ، هـ} كما في المخطط التالي:



الشكل (٣-٢٣)

١) اكتب مدى الاقتران ت

٢) ادرس خواص الاقتران ت

٤ - لتكن أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ب = {١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠}

وليكن هـ : أ ← ب حيث هـ (س) = ٣ س -٢

١) أوجد كلا من هـ (١) ، هـ (٢) ، هـ (٣) ، هـ (٤)

٢) ارسم مخططاً سهمياً للاقتران هـ

٣) ادرس خواص الاقتران هـ

٥ - ارسم منحنى كل من الاقترانات التالية:

١) ق (س) = ٣ - ٢ س

٢) هـ (س) = (١/٢) س + ١

٣) ت (س) = س^{٢} - ٣ س

٤) ك (س) = س^{٢} - ٤س + ٣

٥) ل (س) = س^{٢}

الوحدة الرابعة

البرهان

(٤-١) مقدمة

(٤-٢) البرهان المباشر

(٤-٣) البرهان غير المباشر

(٤-٤) البرهان بالمثال المعاكس

(٤-٥) البرهان بطريقة الاستنزاف (الاستبعاد)

(٤-٦) الاستقراء الرياضي

تمارين ٤-١



(٤ - ١) مقدمة

البرهان الرياضيي هو سلسلة استدلالية من العبارات والتي تعتمد على (أو تستعمل) المسلمات كمبادىء عامة، والنتيجة لهذه السلسلة تسمى نظرية (أو مبرهنة) فالبرهان الرياضي لنظرية ما هو استخدام الدليل المنطقي لبيان أن صحة النظرية تنتج من صحة نظريات سابقة أو مسلمات. وللبرهان الرياضي استراتيجيات عدة نذكر منها ما يلي:

١ - البرهان المباشر.

٢ - البرهان غير المباشر

٣ - البرهان بطريقة الاستنزاف

٤ - البرهان بالمثال المضاد

٥ - الاستقراء الرياضي.

وسنتناول هذه الاستراتيجيات بشيء من الإيجاز مع تطبيقها على أمثلة بسيطة

(٤ - ٢) البرهان المباشر:

وتقوم هذه الاستراتيجية على أساس التحصيل الحاصل:

(ف ∧ (ف ← ن)) ← ن

فلكي نبرهن صحة العبارة ف ← ن، نفترض صحة العبارة ف، ثم باستخدام العبارة ف والنظريات السابقة والمسلمات نستنتج صحة ن، وعندها نكون قد أكملنا برهان ف ← ن، أي أننا برهنا أن ن تكون صحيحة عندما تكون ف صحيحة.

مثال (١) : أثبت أنه، إذا كان أ عدداً طبيعياً زوجياً فإن أ^{٢} عدد زوجي*.

البرهان: نفرض أن أ عدد طبيعي زوجي إذن:

E عدد طبيعي ن بحيث يكون أ = ٢ ن وبتربيع الطرفين ينتج

أ^{٢} = ٤ ن^{٢} = ٢ (٢ ن^{٢})

* تعريف - العدد الزوجي : يكون العدد الطبيعي أ زوجياً إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي ن بحيث أ = ٢ ن

* تعريف - العدد الفردي : يكون العدد الطبيعي أ فردياً إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي ن بحيث أ = ٢ ن + ١

= ٢ ك حيث ك = ٢ ن^{٢} ∋ ط

∴ أ^{٢} عدد طبيعي زوجي

وهو المطلوب

مثال (٢) إذا كانت أ، ب ، ج ثلاث مجموعات ، وكانت

أ ∩ ج = Φ فإن أ ∩ (ب ∪ ج) = أ ∩ ب

البرهان : نفترض أن أ ∩ ج = Φ فيكون

أ ∩ (ب ∪ ج) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج)، توزيع ∩ على ∪

= (أ ∩ ب) ∪ Φ معطى

= أ ∩ ب من خواص Φ

وهو المطلوب

مثال (٣) : أثبت أنه:

إذا كان أ ، ب عددين طبيعيين فرديين، فإن أ + ب عدد زوجي

البدهان:

نفرض أنّ أ ، ب عددان طبيعيان فرديان، إذن E عددان طبيعيان وحيدان ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$ بحيث يكون:

أ = ٢ن$_{١}$ + ١؛ ب = ٢ ن$_{٢}$ + ١ وبالجمع ينتج

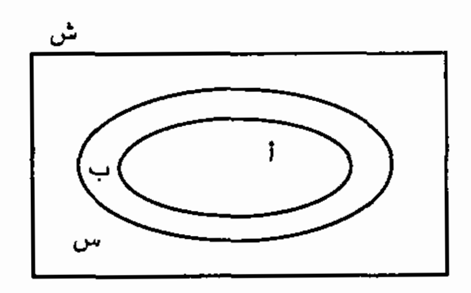
أ + ب = ٢ ن$_{١}$ + ٢ ن$_{٢}$ + ٢

= ٢ (ن$_{١}$ + ن$_{٢}$ + ١) = ٢ ك

حيث ك = ن$_{١}$ + ن$_{٢}$ + ١ ∋ ط

∴ أ + ب عدد زوجي

وهو المطلوب



مثال (٤): أثبت أنه، إذا كانت أ ⊇ ب فإن $\overline{ب}$ ⊇ $\overline{أ}$

البرهان:

نفرض أن أ ⊇ ب فيكون

$\forall$ س $\not\ni$ ب يكون س $\not\ni$ أ

أي $\forall$ س $\ni$ $\overline{ب}$ يكون س $\ni$ $\overline{أ}$

$\therefore$ $\overline{ب} \subseteq \overline{أ}$

وهو المطلوب

(٤ - ٣) البرهان غير المباشر

قد يصعب أحياناً استخدام أسلوب البرهان المباشر لإثبات صحة عبارة شرطية، وعندها نلجأ إلى استراتيجية البرهان غير المباشر وللبرهان غير المباشر أساسان منطقيان هما:

أولاً : المعاكس الإيجابي:

وتقوم هذه الطريقة على أساس تكافىء العبارتين:

ف $\leftarrow$ ن ، ~ ن $\leftarrow$ ~ ف

فبدلاً من إثبات صحة العبارة ف $\leftarrow$ ن نقوم بإثبات صحّة العبارة المكافئة لها وهي ~ ن $\leftarrow$ ~ف (وتسمى المعاكس الايجابي للعبارة ف $\leftarrow$ ن) فنبدأ بافتراض أن ~ ن صحيحة ثم نستنتج أن ~ ف صحيحة وعندها نكون قد أثبتنا صحة العبارة ~ ن $\leftarrow$ ~ ف ومنها نستنتج أن العبارة المكافئة لها ف $\leftarrow$ ن صحيحة أيضاً.

مثال (٥) : اثبت أنه،

إذا كانت أ ، ب مجموعتين حيث أ $\subseteq$ ب فإن أ $\cap$ ب = أ

البرهان:

المعاكس الإيجابي للعبارة المطلوب إثباتها هي العبارة:

إذا كانت أ $\cap$ ب $\neq$ أ فإن أ $\not\subseteq$ ب

ولإثبات هذه العبارة:

نفرض أن أ $\cap$ ب $\neq$ أ، إذا

E س $\ni$ أ بحيث س $\not\ni$ أ $\cap$ ب

$\Leftarrow$ س $\ni$ أ $\wedge$ س $\not\ni$ ب

$\Leftarrow$ أ $\not\subseteq$ ب

∴ فالمعاكس الإيجابي عبارة صحيحة، ومن ذلك نستنتج أن العبارة الشرطية صحيحة وهو المطلوب

مثال (٦) : اثبت انه،

إذا كان أ عدداً طبيعياً وكان $أ^٢$ عدد زوجي، فإن أ عدد زوجي

البرهان:

المعاكس الإيجابي للعبارة المطلوب إثباتها هي العبارة

إذا كان أ عدداً طبيعياً فردياً فإن $أ^٢$ عدد فردي

ولأثبات هذه العبارة،

نفرض أن أ عدد طبيعي فردي ، إذن:

E ن ∋ ط بحيث أ = ٢ ن + ١ وبتربيع الطرفين ينتج

$أ^٢$ = ٤ $ن^٢$ + ٤ ن +١

= ٢ (٢$ن^٢$ + ٢ ن) + ١

= ٢ك + ١ حيث ك = ٢ $ن^٢$ + ٢ ن ∋ ط

∴ $أ^٢$ عدد فردي

∴ فالمعاكس الإيجابي عبارة صحيحة، ومن ذلك نستنتج أن العبارة الشرطية المكافئة لها صحيحة

وهو المطلوب

مثال (٧) : اثبت انه

إذا كانت أ مجموعة ما وكانت Φ هي المجموعة الخالية فإن

أ ∩ Φ = Φ

البرهان :

المعاكس الايجابي للعبارة هي " اذا كانت أ ∩ Φ ≠ Φ فإن Φ ليست المجموعة الخالية".

نفرض أن أ ∩ Φ ≠ Φ ، إذا يوجد على الأقل عنصر س بحيث

س ∋ أ $\cap \Phi$

⇐ س ∋ أ $\wedge$ س ∋ Φ

⇐ Φ ليست مجموعة خالية

∴ فالمعاكس الايجابي عبارة صحيحة، ومن ذلك نستنتج أن العبارة الشرطيّه المكافئة إلى صحيحة.

أي أن أ $\cap \Phi = \Phi$

وهو المطلوب

مثال (٨) : اثبت انه،

إذا كانت أ مجموعة ما فإن $\Phi \subseteq$ أ

البرهان:

لإثبان أن $\Phi \subseteq$ أ علينا إثبان أن العبارة:

إذا كان س ∋ Φ فإن س ∋ أ عبارة صحيحة

وبما أن المعاكس الإيجابي للعبارة الأخيرة هو:

إذا كان س ∌ أ فإن س ∌ Φ

وهذه عبارة صحيحة دائماً لأن Φ مجموعة خالية

∴ فالعبارة: إذا كان س ∋ Φ فإن س ∋ أ عبارة صحيحة

أي أن $\Phi \subseteq$ أ

وهو المطلوب

ثانياً : البرهان بالتناقض

لبرهان صحة عبارة ف بطريقة التناقض نفرض ~ ف ، ومن ثم نحاول أن نجد عبارة من نوع ن $\wedge$ ~ ن حيث ن أي عبارة مركبة تحتوي ف أو أية نظرية سابقة أو مسلمة، وكون ن $\wedge$ ~ ن تناقضاً، فإن افتراضنا ~ ف يكون افتراض خاطىء ومن ثم فإن ف هي العبارة الصحيحة.

وبطريقة البرهان غير المباشر نستطيع أن نبرهن عبارات من نوع:

ف ← ن ؛ E س ، ف (س)؛ ∀ س، ف (س)

فإذا أردنا برهنة ف ← ن فإننا نفترض ~ (ف ← ن) وحيث أن

~ (ف ←ن) تكافىء ف ∧ ~ ن

فإننا نفترض أن ف، ~ ن صحيحتان ثم نحاول الحصول على تناقض، ومنه نستنتج أن الافتراض ~ (ف ←ن) خطأ فتكون ف ← ن هي الصحيحة.

مثال (٩) : برهن أنه:

إذا كان س ∋ ح وكان س ≠ صفر فإن $س^{-١}$ ≠ صفر

البرهان:

نفرض أن س ≠ صفر ∧ $س^{-١}$ = صفر

وبما أن س . $س^{-١}$ = ١؛ $س^{-١}$ = صفر فإن

س. $س^{-١}$ = س × صفر = صفر

∴ ١ = صفر وهذا تناقض (١ ≠ ٠ ∧ ١ = ٠)

∴ س ≠ صفر تحتم أن $س^{-١}$ ≠ صفر

وهو المطلوب

مثال (١٠) إذا كان أ عدداً طبيعياً زوجياً فإن $(أ + ١)^٢$ + ١، عدد زوجي أيضاً

البرهان: نفرض أن

أ عدد طبيعي زوجي ∧ $(أ + ١)^٢$ + ١ عدد فردي فيكون

$(أ + ١)^٢$ + ١ = $أ^٢$ + ٢أ + ٢ . ولأن أ عدد زوجي فإنه يوجد عدد ن ∋ ط بحيث

أ = ٢ن

∴ $(أ+١)^٢$ +١= ٤ $ن^٢$ + ٤ ن + ٢

= ٢ (٢ $ن^٢$ + ٢ ن + ١)

= ٢ ك حيث ك = ٢$ن^٢$ + ٢ن + ١ ∋ ط

∴ (أ + ١)^{٢} + ١ عدد زوجي وهذا يناقض الفرض بأن

(أ + ١)^{٢} + ١ عدد فردي

∴ (أ + ١)^{٢} + ١ عدد زوجي

وهو المطلوب

تمرين: برهن صحة العبارة في مثال (١٠) برهاناً مباشراً

مثال (١١) : إذا كانت أ مجموعة ما فإن أ $\cap$ $\bar{أ}$ = ϕ

البرهان: نفرض أن أ مجموعة $\wedge$ أ $\cap$ $\bar{أ}$ $\neq \phi$

∴ يوجد على الأقل عنصر س بحيث س $\in$ أ $\cap$ $\bar{أ}$

$\Leftarrow$ س $\in$ أ $\wedge$ س $\in$ $\bar{أ}$

$\Leftarrow$ س $\in$ أ $\wedge$ س $\notin$ أ وهذا تناقض

∴ أ $\cap$ $\bar{أ}$ = ϕ

وهو المطلوب

مثال (١٢) : إذا كان أ × ب = صفر فإن أ = صفر أو ب = صفر

حيث أ ، ب $\in$ ح

البرهان: نفرض أن

أ × ب = صفر $\wedge$ أ $\neq$ صفر، ب $\neq$ صفر

بما أن أ $\neq$ صفر فإن أ$^{-١}$ $\neq$ صفر

∴ أ$^{-١}$ × (أ × ب) = أ$^{-١}$ × صفر

(أ$^{-١}$ × أ) × ب = صفر

١ × ب = صفر

ب = صفر وهذا يناقض الفرض بأن ب $\neq$ صفر

∴ أ = صفر أو ب = صفر

وهو المطلوب

مثال (١٣) : أثبت أنه:

إذا كات أ،ب مجموعتين فإن (أ/ب) ∩ ب = ϕ

البرهان :

نفرض أن أ ، ب مجموعتان ∧ (أ/ب) ∩ ب ≠ ϕ

∴ يوجد على الأقل عنصر س بحيث س ∈ (أ/ب) ∩ ب

⇐ س ∈ أ/ب ∧ س ∈ ب

⇐ (س ∈ أ ∧ س ∉ ب) ∧ س ∈ ب

⇐ س ∈ أ ∧ (س ∉ ب ∧ س ∈ ب)

والعبارة (س ∉ ب ∧ س ∈ ب) تناقض

∴ (أ/ب) ∩ ب = ϕ

(٤ - ٤) البرهان بالمثال المعاكس:

رأينا في دراستنا للمنطق أن العبارة المسورة كلياً :

∀ س ∈ أ تكون ف (س) ..... (١)

تكون صحيحة إذا كانت مجموعة الحل للجملة المفتوحة ف (س) = أ ، وتكون خطأ إذا وجد عنصر في أ لا ينتمي لمجموعة الحل، أي لا يجعل ف (س) عبارة صحيحة، ولذلك فإن إعطاء عدة أمثلة من عناصر أ تجعل ف (س) عبارة صحيحة لا يكفي لاستنتاج صحة العبارة (١)، ولكن إعطاء مثال واحد على الأقل من عناصر أ يجعل ف (س) عبارة خطأ يكفي لاستنتاج خطأ العبارة (١)، مثل هذا المثال يسمى مثال معاكس.

مثال (١٣): هل العبارة

∀ ن ∈ ط يكون $\frac{١}{ن}$ < ٠,١ صحيحة؟

الحل: لنأخذ ن = ٢ فتكون $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥ < ٠,١ عبارة خطأ

∴ فالعبارة خطأ

مثال (١٤) : هل العبارة :

"كل عدد أولي يكون فردياً" صحيحة؟

الحل: لنأخذ العدد ٢

العدد ٢ أولي ولكنه ليس فردياً

فالعبارة خطأ

مثال (١٥) هل العبارة

$\forall$ س $\ni$ ص يكون س^{٢} > ١ صحيحة؟ حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة.

الحل: إذا أخذنا العدد -١ أو العدد صفر أو العدد ١ فإنه

-١ $\ni$ ص بينما (-١)^{٢} > ١ عبارة خطأ

$\therefore$ فالعبارة خطأ

مثال (١٦): هل العبارة

إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن أ $\cup$ (ب/أ) = ب صحيحة؟

الحل: العبارة الشرطية تكافىء العبارة المسورة:

$\forall$ مجموعتين أ ، ب يكون أ $\cup$ (ب/أ) = ب .... (I)

فإذا أخذنا أ = {أ ، ب} ؛ ب = {ب، ج} فإن

أ $\cup$(ب/أ) = أ$\cup$ {ج} = {أ، ب ، ج} # ب

فالعبارة (I) خطأ ولذلك فالعبارة الشرطية المكافئة لها خطأ

مثال (١٧) : أعط مثالاً يبين خطأ العبارة التالية:

إذا كان أ عاملاً من عوامل ب + ج فإن أ عامل من عوامل ب أو عامل من عوامل ج

البرهان: لنأخذ أ = ٣،ب = ٥،ج = ٧ فيكون:

ب + ج = ١٢

واضح أن أ عامل من عوامل ب + ج (٣ عامل من عوامل ١٢)

بينما أ ليس عاملاً من عوامل ب وليس عاملاً من عوامل ج.

(٤ - ٥) البرهان بطريقة الاستنزاف (الاستبعاد)

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون المطلوب إثبات صحة إمكانية ما من بين عدة إمكانيات، حيث نتناول هذه الامكانيات واحدة واحدة، ونتوصل إلى أنها غير مقبولة ما عدا الإمكانية المطلوبة.

مثال (١٨) : اثبت أنه:

إذا كان أ = ب فإن أ^{٢} = ب^{٢} حيث أ ، ب ∋ ح

البرهان: نفرض أن أ = ب وندرس الامكانيات الثلاث التالية:

أ^{٢} < ب^{٢} ، أ^{٢} > ب^{٢} ، أ^{٢} = ب^{٢}

(I) إذا كانت أ^{٢} < ب^{٢} فإن أ^{٢} − ب^{٢} < صفر

⇐ (أ − ب) (أ + ب) < صفر

⇐ (صفر) (أ + ب) < صفر

⇐ صفر < صفر وهذه النتيجة تتناقض مع كون صفر = صفر

∴ أ^{٢} ≯ ب^{٢} .... (i)

(II) إذا كانت أ^{٢} > ب^{٢} فإن أ^{٢} − ب^{٢} > صفر

⇐ (أ − ب) (أ + ب) > صفر

⇐ صفر > صفر وهذا تناقض أيضاً

∴ أ^{٢} ≮ ب^{٢} .... (II)

من (I) ، (II) نستنتج أن الامكانية الوحيدة هي أ٢ = ب٢ وهو المطلوب

مثال (١٩): اثبت أنه،

إذا كان أ، ب ∋ ح̲ وكان أ < ب فإن أ^{٢} > ب^{٢} حيث ح̲ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة

البرهان: نفرض أن أ ، ب ∋ ح̲ ، أ < ب فيكون

أ + ب سالب، أ − ب سالب

ندرس الحالات الثلاث التالية:

أ^{٢} < ب^{٢} ، أ^{٢} = ب^{٢} ، أ^{٢} > ب^{٢}

(i) إذا كان أ^{٢} < ب^{٢} فإن أ^{٢} − ب^{٢} < صفر

⇐ (أ − ب) (أ + ب) < صفر وهذا غير ممكن لأن (أ − ب) (أ + ب) موجب

(ii) اذا كان أ^{٢} = ب^{٢} فإن أ^{٢} −ب^{٢} = صفر.

⇐ (أ − ب) (أ + ب) = صفر وهذا غير ممكن لأن (أ − ب) (أ + ب) موجب

∴ لم يبق إلا الحالة الثالثة وهي أ^{٢} > ب^{٢} وهو المطلوب

برهان آخر (مباشر)

نفرض أن أ ، ب ∋ ح، وأن أ < ب فيكون

أ + ب عددا سالباً، أ − ب عدداً سالباً

∴ (أ + ب) (أ −ب) > صفر

أي أن أ^{٢} − ب^{٢} > صفر ⇐ أ^{٢} > ب^{٢} وهو المطلوب

(٤ - ٦) الاستقراء الرياضي:

سنتعرف في هذا البند على أبسط صورة لمبدأ الاستقراء الرياضي ونطبقه على أمثلة تتعلق بمجموعة الأعداد الطبيعية.

فإذا كانت ف (س) جملة مفتوحة معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية ط وكانت ج هي مجموعة الحل للجملة ف (س) بحيث:

(١) ١ ∋ ج أي أن ف (١) عبارة صحيحة.

(٢) إذا كان ك ∋ ج فإن ك + ١ ∋ ج ، أي أنه

إذا كانت ف (ك) صحيحة فإن ف (ك + ١) تكون صحيحة

فإن ج = ط

أي أن ف (س) صحيحة لكل س ∋ ط

والأمثلة التالية تبين كيف نستخدم هذا المبدأ لإثبات صحة عبارات مسورة كلياً على ط.

مثال (١٩) : برهن انه:

$\forall$ ن $\in$ ط يكون ١ + ٢ + ٣ + ... + ن = $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$

البرهان: لتكن ف (ن) هي الجملة المفتوحة:

١ + ٢ + ٣ ..... + ن = $\frac{ن (ن + ١)}{٢}$ حيث ن $\in$ ط

(١) عندما ن = ١ يكون الطرف الأيمن = ١

والطرف الأيسر = $\frac{١ (١ + ١)}{٢}$ = ١

$\therefore$ ف (١) عبارة صحيحة (I)

(٢) نفرض أن ف (ك) عبارة صحيحة، أي أن:

١ + ٢ + ٣ + ... + ك = $\frac{ك(ك+١)}{٢}$ ...... (I)

وسنحاول إثبات أن ف (ك + ١) عبارة صحيحة، أي أن

١ + ٢ + ٣ + ... + ك+ (ك + ١) = $\frac{(ك+١) (ك + ٢)}{٢}$ ...... (II)

البرهان : بإضافة ك + ١ لطرفي العبارة (I) ينتج:

١ + ٢ + ٣ + ... + ك + (ك + ١) = $\frac{ك (ك+١)}{٢}$ + (ك +١)

= $\frac{ك (ك + ١) + ٢ (ك + ١)}{٢}$

= $\frac{(ك + ١) (ك + ٢)}{٢}$ وهي العبارة (II)

$\therefore$ عندما تكون ف (ك) صحيحة فإن ف (ك + ١) تكون صحيحة ..... (II)

من (I) ؛ (II) نستنتج أن العبارة الواردة في السؤال صحيحة

وهو المطلوب

مثال (٢٠) اثبت أنه،

∀ ن ∋ ط يكون : $١ + ٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ... ٢^ن = ٢^{ن+١} - ١$ .... (١)

البرهان: لتكن ف (ن) هي الجملة المفتوحة :

$١ + ٢ + ٢^٢ + ٢^٣ + ... ٢^ن = ٢^{ن+١} - ١$ حيث ن ∋ ط

أولاً : عندما ن = ١ فإن الطرف الأيمن = ١ + ٢ = ٣

والطرف الأيسر = $٢^٢ - ١ = ٣$

ف (١) عبارة صحيحة .... (I)

ثانيا: نفرض أنّ ف (ك) عبارة صحيحة، أي أن

$١ + ٢ + ٢^٢ + ٢^٣ + ... ٢^ك = ٢^{ك+١} - ١$ .... (I)

وسنحاول إثبات أن ف (ك + ١) عبارة صحيحة، أي أن

$١+٢ + ٢^٢ + ٢^٣ + ... ٢^ك + ٢^{ك+١} = ٢^{ك+٢} - ١$ .... (II)

البرهان: بإضافة $٢^{ك+١}$ لطرفي العبارة (I) ينتج:

$١ + ٢ + ٢^٢ + ٢^٣ + \cdots ٢^ك + ٢^{ك+١} = + ٢^{ك+١} - ١ + ٢^{ك+١}$

$= ٢ \times ٢^{ك+١} - ١$

$= ٢^{ك+٢} - ١$ وهي العبارة (II)

∴ عندما تكون ف (ك) صحيحة فإن ف (ك +١) تكون صحيحة .... (II)

من (I) ، (II) نستنتج أن العبارة الواردة في السؤال صحيحة

وهو المطلوب

تمارين (٤ - ١)

اثبت صحة كل من العبارات التالية:

١ - إذا كان أ عدداً فردياً فإن $أ^٢$ عدد فردي

٢ - إذا كان أ ، ب مجموعتين وكان أ ∩ ب = Φ فإن أ ⊆ $\overline{ب}$

٣ - إذا كانت أ ⊆ ب فإن أ ∩ب = أ

٤ – إذا كان أ عدداً فردياً، ب عدداً زوجياً فإن أ + ب عدد فردي

٥ – إذا كانت أ ، ب مجموعتين فإن ب/أ = $\overline{أ}$ / $\overline{ب}$

٦ – إذا كانت ع١ ، ع٢ علاقتين انعكاسيتين ومتماثلتين على مجموعة س فإن ع١ ∪ ع٢ علاقة انعكاسية ومتماثلة على س.

٧ - أعط مثالاً يبين خطأ ما يلي:

(i) لكل ثلاث مجموعات أ ، ب ، ج تكون

أ ∪ (ب/ج) = (أ ∪ ب) / (أ ∪ ج)

(ii) كل علاقة تخالفية تكون انعكاسية.

(iii) كل علاقة انعكاسية تكون متماثلة

٨ - أثبت باستخدام الاستقرار الرياضي:

(i) ١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ ن – ١) = $ن^٢$

(ii) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + .. + ن^٢ = \frac{ن (ن + ١) (٢ ن +١)}{٦}$

(iii) $٢^{٢ن - ١} + ٣^{٢ن-١}$ يقبل القسمة على ٥ .

المراجع:

١- محمد أبو صالح، موفق حجة، عدنان عابد، أمل خصاونة، عبد الرحمن مقبل. (١٩٩٣م). "مفاهيم الرياضيات في الصفوف الأربعة الأولى(١)" الجمهورية اليمنية.

٢- لطفي لطفية، عدنان عوض، محمد أبو صالح، فريد أبو زينة (١٩٨٥).
"أسس الرياضيات" سلطنة عُمان.

٣ - عوض منصور، عزام صبري، عماد عطيّة (١٩٩٢).
" أسس التحليل الرياضي" الجزء الأول. دار مروان للنشر والتوزيع/ عمان/الأردن.

٤ - عبد العزيز يوسف، محمد سليمان محمد الشامي (ط٢ ١٩٨٧).
"المفاهيم الأساسية " مكتب الفلاح/ الكويت.

5- James, F. Ulrich, Josef N. Payne. Geometry.
Harcourt Brace Jovanovich,Inc. 1972.

6- Foster, Cummins, Yunker. Geometry.
Merrill Publishing Company. Ohio 1987.

7- Douglas Bumby, Richard Klutch.
Mathematics, A Topical Approach.
Charles E. Merrill Publishing Co.Ohio 1985.

8- ST(P) Mathematics, Series.
Stanley Thornes (Publishers) Ltd. 1985.

أسس الرياضيات والمفاهيم الهندسية الاساسية

